Fernando Guerra
Inder Jeet Taneja

Volume 1

Matemática Básica

COMISSÃO DE AVALIAÇÃO E ACOMPANHAMENTO – PNAP

Alexandre Marino Costa
Claudinê Jordão de Carvalho
Eliane Moreira Sá de Souza
Marcos Tanure Sanabio
Maria Aparecida da Silva
Marina Isabel de Almeida
Oreste Preti
Teresa Cristina Janes Carneiro

METODOLOGIA PARA EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

Universidade Federal de Mato Grosso

COORDENAÇÃO TÉCNICA – DED

André Valente de Barros Barreto
Soraya Matos de Vasconcelos
Tatiane Michelon
Tatiane Pacanaro Trinca

AUTORES DO CONTEÚDO

Fernando Guerra
Inder Jeet Taneja

EQUIPE DE DESENVOLVIMENTO DE RECURSOS DIDÁTICOS CAD/UFSC

Coordenador do Projeto
Alexandre Marino Costa

Coordenação de Produção de Recursos Didáticos
Denise Aparecida Bunn

Supervisão de Produção de Recursos Didáticos
Flavia Maria de Oliveira

Designer Instrucional
Denise Aparecida Bunn
Andreza Regina Lopes da Silva

Supervisora Administrativa
Erika Alessandra Salmeron Silva

Capa
Alexandre Noronha

Ilustração
Igor Baranenko

Projeto Gráfico e Finalização
Annye Cristiny Tessaro

Editoração
Rita Castelan

Revisão Textual
Sergio Meira

Prefácio

Os dois principais desafios da atualidade na área educacional do país são a qualificação dos professores que atuam nas escolas de educação básica e a qualificação do quadro funcional atuante na gestão do Estado Brasileiro, nas várias instâncias administrativas. O Ministério da Educação está enfrentando o primeiro desafio através do Plano Nacional de Formação de Professores, que tem como objetivo qualificar mais de 300.000 professores em exercício nas escolas de ensino fundamental e médio, sendo metade desse esforço realizado pelo Sistema Universidade Aberta do Brasil (UAB). Em relação ao segundo desafio, o MEC, por meio da UAB/CAPES, lança o Programa Nacional de Formação em Administração Pública (PNAP). Esse Programa engloba um curso de bacharelado e três especializações (Gestão Pública, Gestão Pública Municipal e Gestão em Saúde) e visa colaborar com o esforço de qualificação dos gestores públicos brasileiros, com especial atenção no atendimento ao interior do país, através dos Polos da UAB.

O PNAP é um Programa com características especiais. Em primeiro lugar, tal Programa surgiu do esforço e da reflexão de uma rede composta pela Escola Nacional de Administração Pública (ENAP), do Ministério do Planejamento, pelo Ministério da Saúde, pelo Conselho Federal de Administração, pela Secretaria de Educação a Distância (SEED) e por mais de 20 instituições públicas de ensino superior, vinculadas à UAB, que colaboraram na elaboração do Projeto Político Pedagógico dos cursos. Em segundo lugar, esse Projeto será aplicado por todas as Instituições e pretende manter um padrão de qualidade em todo o país, mas abrindo

margem para que cada Instituição, que ofertará os cursos, possa incluir assuntos em atendimento às diversidades econômicas e culturais de sua região.

Outro elemento importante é a construção coletiva do material didático. A UAB colocará à disposição das Instituições um material didático mínimo de referência para todas as disciplinas obrigatórias e para algumas optativas, esse material está sendo elaborado por profissionais experientes da área da administração pública de mais de 30 diferentes Instituições, com apoio de equipe multidisciplinar. Por último, a produção coletiva antecipada dos materiais didáticos libera o corpo docente das Instituições para uma dedicação maior ao processo de gestão acadêmica dos cursos; uniformiza um elevado patamar de qualidade para o material didático e garante o desenvolvimento ininterrupto dos cursos, sem paralisações que sempre comprometem o entusiasmo dos alunos.

Por tudo isso, estamos seguros de que mais um importante passo em direção à democratização do ensino superior público e de qualidade está sendo dado, desta vez, contribuindo também para a melhoria da gestão pública brasileira, compromisso deste governo.

Celso José da Costa
Diretor de Educação a Distância
Coordenador Nacional da UAB
CAPES-MEC

Sumário

Unidade 3 – Razões, Proporções e Porcentagem

Unidade 4 – Potenciação, Radiciação e Racionalização

Unidade 5 – Equações de 1º e 2º Graus, Inequações de 1º Grau

Apresentação

Olá, caro estudante do curso de Administração Pública.

Seja bem-vindo!

Estamos iniciando a disciplina de *Matemática Básica*. Ela foi desenvolvida com objetivo de revisar alguns conteúdos e conceitos básicos estudados no Ensino Fundamental e Médio para aplicar no curso de Administração.

Ao iniciar os estudos desta disciplina, algumas perguntas devem passar pela sua cabeça: Qual o seu campo de aplicação? Qual a sua utilidade prática?

Bem, o campo de aplicação é bastante amplo, pois suas técnicas são necessárias e serão empregadas nas disciplinas quantitativas de seu curso.

Quanto à sua utilidade prática, você pode utilizar no seu cotidiano, como, por exemplo, calcular porcentagens de ganhos e perdas.

Para tornar a revisão mais prática e agradável, a disciplina foi dividida em 5 (cinco) Unidades, todas elas com muitos exemplos e atividades:

Unidade 1: Conjuntos;

Unidade 2: Produtos Notáveis e Frações;

Unidade 3: Razão, Proporção e Porcentagem;

Unidade 4: Potenciação, Radiciação e Logaritmo;

Unidade 5: Equações de 1º e 2º graus, Inequações de 1º grau.

Os conteúdos que abordaremos neste texto didático envolvem Conjuntos, Conjuntos Numéricos, Intervalos, Frações, Potenciação, Radiciação, Produtos Notáveis, Razão, Proporção,

Porcentagem, Equações do 1º e 2º graus com uma variável e Inequações do 1º Grau (desigualdades). Nas atividades, você encontrará problemas de Administração que utilizam os conceitos estudados.

Esses conteúdos vão auxiliar você durante a aprendizagem das disciplinas Matemática para Administradores, Matemática Financeira e a Estatística.

Esperamos que você tenha sucesso nos estudos que se propôs a fazer ao iniciar esta disciplina. Bons estudos!

Professores Fernando Guerra e Inder Jeet Taneja.

UNIDADE 1

Conjuntos Numéricos

Objetivos Específicos de Aprendizagem

Ao finalizar esta Unidade você deverá ser capaz de:

- Identificar e enumerar os tipos de conjuntos, tais como vazio, unitário, finito, infinito;
- Identificar os conjuntos numéricos, a reta numérica e intervalos; e
- Utilizar operações com conjuntos, tais como a intersecção, a união e a diferença.

Conjuntos Numéricos

Caro estudante!

Nesta Unidade você irá rever a teoria dos conjuntos. Você lembra dessa teoria, do que ela trata, para que serve e como é utilizada? Assim como em outros assuntos da Matemática, também na teoria dos conjuntos certas noções são aceitas sem definição a fim de servirem como ponto inicial de estudos, como primitivas. Na teoria dos conjuntos as noções consideradas primitivas são:

- Conjunto;
- Elemento; e
- Pertinência entre elemento e conjunto.

Vamos ver, resumidamente, cada uma delas?

A noção de conjuntos, fundamental na Matemática de nossos dias, não é suscetível de definição precisa a partir de noções mais simples, ou seja, é uma noção primitiva. Foi introduzido pelo matemático russo George Cantor (1845 – 1918).

O conjunto é um conceito fundamental em todos os ramos da Matemática. Intuitivamente, um conjunto é uma lista, coleção ou classe de objetos bem definidos. Os objetos em um conjunto podem ser: números, variáveis, equações, operações, algoritmos, sentenças, nomes, etc.

Em Matemática estudamos conjuntos de: números, pontos, retas, curvas, funções, etc. Veja a seguir alguns exemplos de conjuntos:

- Conjunto de livros da área de Administração em uma biblioteca;
- Conjunto dos pontos de um plano;
- Conjunto das letras da palavra Administração;
- Conjunto dos conselhos regionais de Administração (CRA) existentes no Brasil; e
- Conjunto de escritórios de Contabilidade da região sul.

Notação

Você sabe para que utilizamos o termo notação?

Normalmente empregamos, na teoria dos conjuntos, a notação, para representarmos ou designarmos um conjunto de sinais. Veja a seguir:

- Os conjuntos são indicados por letras maiúsculas: A, B, C, ..., X, Y, Z; e
- Os elementos são indicados por letras minúsculas: a, b, c, ..., x, y, z.

Assim podemos dizer que temos um dado conjunto A cujos seus elementos são a, b, c, d. A representação deste conjunto é dada pela notação:

$$A = \{a, b, c, d\}$$

que se lê: "*A é o conjunto finito cujos elementos são a, b, c, d*".

Você entendeu como se faz a leitura de conjunto? Leia o conjunto a seguir.

- Conjunto dos nomes dos dias da semana que começam pela letra s:

  B = {*segunda*, *sexta*, *sábado*}

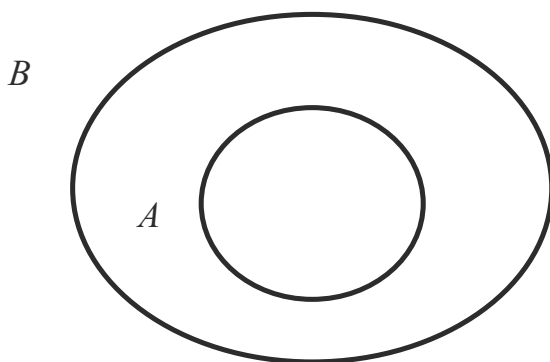
  Aqui *segunda*, *sexta e sábado* são elementos do conjunto.

Relação de pertinência

Para indicar que um elemento x pertence ou não a um conjunto A, escreve-se simbolicamente: $x \in A$ e $x \notin A$ e lê-se: *x pertence a A e x não pertence a A*.

Relação de inclusão

Dizemos que um conjunto A está contido em um conjunto B, se, e somente se, todo elemento de A é também elemento de B.

- Notação: $A \subset B$ ou $B \supset A$.
- Simbolicamente: $A \subset B \Leftrightarrow \forall\, x \in A \Rightarrow x \in B$.
- Graficamente:

Observações:

- $\forall A, \varnothing \subset A$.
- Quando $A \subset B$, dizemos que A é um subconjunto de B.

Conjuntos numéricos fundamentais

Inicialmente falamos sobre conjuntos de um modo geral. Vamos agora aprender um pouco mais sobre conjuntos numéricos.

Você sabe definir que conjuntos são esses? Com certeza esta pergunta não traz nenhuma dificuldade de resposta para você. Mas, se mudássemos a pergunta para: Quais as aplicações dos conjuntos numéricos no dia a dia? Você saberia responder?

De modo geral, nossa pergunta não seria respondida de uma forma tão direta, pois quando aprendemos e até quando ensinamos conjuntos numéricos, dificilmente vemos a sua aplicação, a sua utilização; o que torna muitos conteúdos sem sentido.

Para a Matemática, é evidente que os conjuntos de maior interesse são aqueles formados por números. Há certos conjuntos numéricos que têm importância especial devido às propriedades das operações entre seus elementos e, por isso, recebem nome convencional. Vamos, então, estudar esses conjuntos numéricos.

Conjunto dos números naturais

Iniciamos nosso estudo sobre conjuntos numéricos pelo conjunto dos números naturais (N).

Você já se perguntou por que naturais?

Isso mesmo porque, surgiram "naturalmente" da necessidade de contar objetos e seres. Por volta de 4000 antes de Cristo, algumas comunidades primitivas aprenderam a usar ferramentas e armas de bronze. Aldeias situadas às margens dos rios transformavam-se em cidades. A vida ia ficando mais complexa. Novas atividades iam surgindo, graças, sobretudo ao desenvolvimento do comércio. Os agricultores passaram a produzir alimentos em quantidades superiores às suas necessidades.

Com isso, algumas pessoas puderam se dedicar a outras atividades, tornando-se artesãos, sacerdotes, comerciantes e administradores. Como consequência desse desenvolvimento, surgiu a escrita. Partindo-se dessa necessidade, passou-se a representar quantidades através de símbolos. Observe que os números naturais vieram com a finalidade de contagem.

O conjunto dos números naturais é:
N = {0, 1, 2, ...}

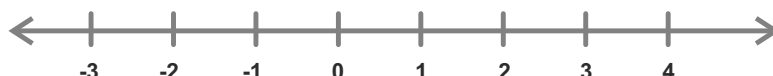
Conjunto dos números inteiros

Pertencem ao conjunto dos números inteiros os números negativos e também o Conjunto dos Números Naturais.

Os números negativos são opostos aos números positivos e os positivos são opostos aos negativos.

Vamos conhecer qual a notação para os conjuntos dos números inteiros?

Z = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}

Agora vamos considerar os números inteiros ordenados sobre uma reta. Veja a figura a seguir:

Conjunto dos números racionais

O conjunto dos números racionais é uma extensão do conjunto dos números inteiros com as frações positivas e negativas, que denotamos por:

$$\boldsymbol{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p, q \in \mathbb{R} \;\; e \;\; q \neq 0 \right\}$$

Você está pronto para conhecer alguns exemplos de números racionais?

- $-3, -\frac{6}{5}, \; -1, \frac{2}{7}, \;\; 1, \frac{3}{5}.$
- $-3, = \frac{-3}{1} = \frac{-6}{2} = \frac{-9}{3}.$
- $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12}$

É interessante, quando falamos de número racional, considerarmos a representação decimal obtida pela divisão de p por q, ou seja, $\frac{p}{q}$.

Exemplos referentes às dizimas exatas ou finitas:

$$\frac{1}{2} = 0{,}5, -\frac{5}{4} = -1{,}25 \text{ e } \frac{75}{20} = 3{,}75.$$

Exemplos referentes às dízimas infinitas periódicas:

$$\frac{1}{3} = 0{,}333... - \frac{6}{7} = 0{,}857142857142... \frac{7}{6} = 1.1666...$$

Toda dízima exata ou periódica pode ser representada na forma de número racional.

Conjunto dos números irracionais

Este conjunto é composto por dízimas infinitas não periódicas, ou seja, os números que não podem ser escritos na forma de fração (divisão de dois inteiros).

Como exemplos de números irracionais, podemos citar a raiz quadrada de dois e a raiz quadrada de três. Veja a seguir:

- $\sqrt{2} = 1{,}4114213\ldots$; e
- $\sqrt{3} = 1{,}732058....$

Conjunto dos números reais

O conjunto dos números reais (R) é uma expansão do conjunto dos números racionais que engloba não só os inteiros e os fracionários, positivos e negativos, mas também todos os números irracionais, ou seja,

Conjunto dos números reais é a união dos conjuntos dos números racionais e dos irracionais.

Reta numérica

Uma maneira prática de representarmos os números reais é através da reta real. Para construí-la, desenhamos uma reta e, sobre ela, escolhemos um ponto arbitrário, denominado ponto origem, que representará o número zero e outro ponto arbitrário a sua direita, o ponto 1.

A distância entre os pontos mencionados chamamos de unidade de medida e, com base nela, marcamos ordenadamente os números positivos para aqueles situados à direita da origem e os números negativos para os situados à esquerda.

Intervalos

São particularmente importantes alguns subconjuntos dos números reais, denominados intervalos, pois eles são fundamentais na aprendizagem de Matemática para Administradores e são utilizados para definir funções, limite, continuidade etc.

Você está preparado para conhecer alguns exemplos de intervalos? Então, veja a seguir:

- Os números da reta real, compreendidos entre 1 e 6, incluindo os extremos 1 e 6, formam o **intervalo fechado** [1, 6], ou seja, $[1, 6] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 6\}$, cuja representação na reta real é a seguinte:

Atenção! As **bolinhas cheias** nos pontos 1 e 6 indicam a inclusão destes extremos no intervalo.

- Os números da reta real, compreendidos entre 2 e 7, e excluindo os extremos 2 e 7, formam o **intervalo aberto** (2, 7), ou seja, $(2, 7) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 7\}$, cuja representação na reta real é a seguinte:

Observe que as **bolinhas vazias** nos pontos 2 e 7 indicam a exclusão destes extremos no intervalo.

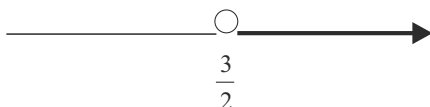
- Os números da reta real, compreendidos entre 3 e 5, incluindo o 3 e excluindo o 5, formam o **intervalo fechado à esquerda e aberto à direita** [3,5), ou seja, $[3, 5) = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x < 5\}$, cuja representação na reta real é a seguinte:

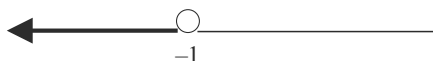
Agora temos a **bolinha cheia** no ponto 3 e a **bolinha vazia** no ponto 5, o que indica a inclusão do primeiro extremo e a exclusão do segundo no intervalo.

- Os números da reta real, compreendidos entre 4 e 9, excluindo o 4 e incluindo o 9, formam o **intervalo aberto à esquerda e fechado à direita** [3,5), ou seja, $(4, 9] = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x \leq 9\}$, cuja representação na reta real é a seguinte:

Nesta situação temos a **bolinha vazia** no ponto 4 e a **bolinha cheia** no ponto 9, o que demonstra a exclusão do primeiro extremo e a inclusão do segundo no intervalo.

- Os números da reta real, situados à direita de 6, e incluindo o próprio 6, formam o **intervalo infinito fechado à esquerda** $[6,+\infty)$, ou seja, $[6, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 6\}$, cuja representação na reta real é a seguinte:

- Os números da reta real, situados à direita de $\frac{3}{2}$, e excluindo o próprio $\frac{3}{2}$, formam o **intervalo infinito aberto à esquerda** $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$, ou seja, $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x>\frac{3}{2}\right\}$, cuja representação na reta real é a seguinte:

- Os números da reta real, situados à esquerda de –2, e incluindo o próprio –2, formam o **intervalo infinito fechado à direita** $(-\infty, -2]$, ou seja, $(-\infty, -2] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}$, cuja representação na reta real é a seguinte:

- Os números da reta real, situados à esquerda de –1, e excluindo o próprio –1, formam o **intervalo infinito aberto à direita** $(-\infty, -1)$, ou seja, $(-\infty, -1) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$, cuja representação na reta real é a seguinte:

Conjuntos: vazio, unitário, finito e infinito

Nesse tópico, iremos tratar de diferentes conjuntos utilizados na Matemática.

Conjunto vazio

É todo conjunto que não possui nenhum elemento. Sua notação é dada por: { } ou ∅. Conheça a seguir alguns exemplos de conjunto vazio:

- $A = \{x \mid x$ é homem e x é mulher$\} = \varnothing$.

- $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 9 < x < 10\} = \varnothing$.

Conjunto unitário

É todo conjunto constituído de um único elemento. Observe os exemplos a seguir:

i) O conjunto das raízes da equação $2x+1 = 7$: Resposta: $\{3\}$, o que representa um conjunto unitário.

ii) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 5\} = \{4\}$.

Conjunto finito

Um conjunto A é dito finito quando podemos listar todos os seus elementos, ou seja, tem um número finito de elementos. Por exemplo, o conjunto $A = \{0, 2, 4, 6\}$ é finito.

Conjunto infinito

É todo conjunto que contém um número infinito de elementos. Por Exemplo, $M = \{0, 2, 4, 6, 8, ..., 2n, ...\}$ é um conjunto infinito.

Conjunto universo

É um conjunto que contém todos os elementos do contexto no qual estamos trabalhando. O conjunto universo é representado por uma letra U.

Igualdade entre dois conjuntos

O conjunto A é igual ao conjunto B, se e somente se A está contido em B e B está contido em A.

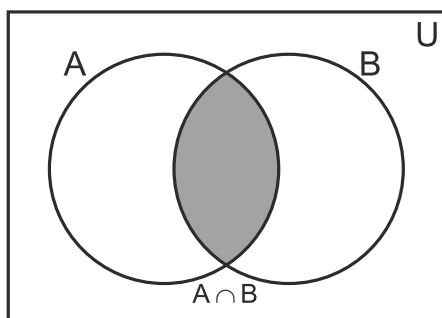
Simbolicamente: $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ e $B \subset A$.

Operações com conjunto

Intersecção de conjuntos

Dados dois conjuntos *A e B*, chamamos de **intersecção** de *A* com *B*, e anotamos por $A \cap B$ (lê-se "A inter B"), ao conjunto constituído por todos os elementos que pertencem simultaneamente a *A* e a *B*.

Simbolicamente: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$.

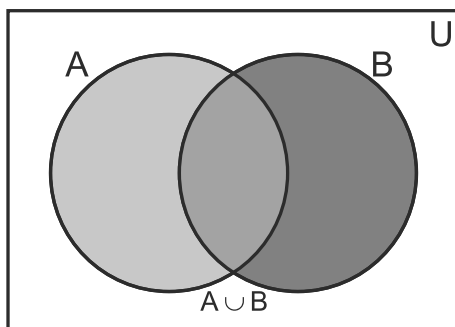
Representação geométrica:

Por exemplo: Sejam os conjuntos $A = \{2, 3, 6, 8\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 7\} = \{3,4,5,6\}$ e $C = \{5\}$. Temos: $A \cap B = \{3,6\}$, $A \cap C = \varnothing$ e $B \cap C = \{5\}$.

Quando $A \cap B = \varnothing$, dizemos que *A* e *B* são disjuntos, ou seja, dois conjuntos são disjuntos se não tiverem nenhum elemento em comum.

União de conjuntos

Dados dois conjuntos *A e B*, chamamos de **união ou reunião** de *A* com *B*, e anotamos por $A \cup B$ (lê-se "A reunião B"), ao conjunto constituído por todos os elementos que pertencem a *A* e/ou a *B*.

Simbolicamente dizemos que: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

E, geometricamente a representação é feita conforme mostrado a seguir:

Agora observe os conjuntos definidos abaixo:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\} = \{0,1,2,3,4\}$;
$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 7\} = \{2,3,4,5,6\}$ e
$C = \{10,12\}$.

Você sabe fazer a união dos conjuntos? Então vamos resolver juntos.

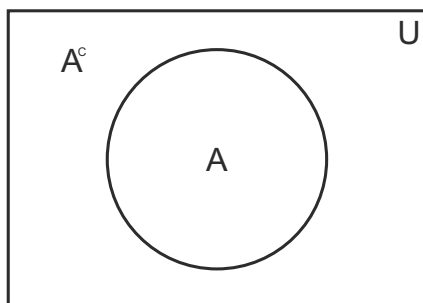
$A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 6\}$.
$A \cup C = \{0,1,2,3,4,10,12\}$.
$B \cup C = \{2,3,4,5,6,10,12\}$.

Conjunto complementar

Seja $A \subset U$. O conjunto complementar de A em relação U, é o conjunto dos elementos de U que não pertencem a A.

Notação: $C_U(A)$, $C(A)$, ou A^C.

Simbolicamente: $A^C = \{x \mid x \in U \text{ e } x \notin A\}$.

Representação geométrica:

Ficou claro? Então vamos analisar juntos o complementar dos conjuntos a seguir?

$U = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 7\} = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}; A = \{0,1,2,3\}$ e $B = \{2,4,6,7\}$.

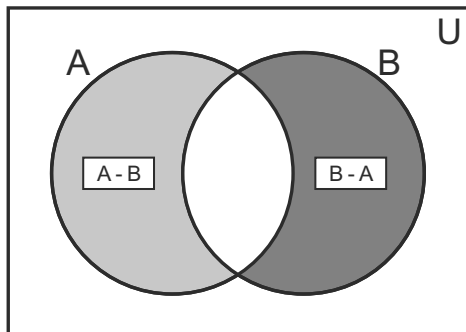
Assim podemos dizer que:

- $A^C = \{4,5,6,7\}$; e
- $B^C = \{0,1,3,5\}$.

Diferença de conjuntos

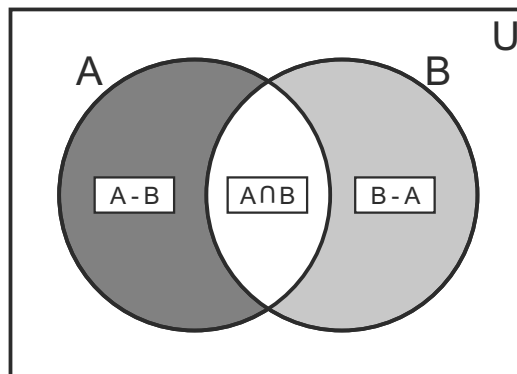
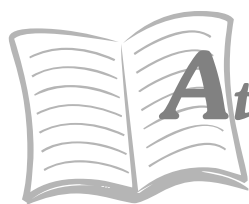
Dados dois conjuntos *A* e *B*, chamamos de **diferença** entre *A* e *B*, e anotamos por *A* – *B*, ao conjunto constituído por todos os elementos que pertencem a *A* e que não pertencem a *B*.

Simbolicamente: $A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

Representação geométrica:

Exemplos:

- Para os conjuntos: $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ e $B = \{4,5,6,7,8\}$, temos: $A - B = \{1,2,3\}$ e $B - A = \{7,8\}$.
- $\{a,b,c\} - \{b,c,d\} = \{a\}$.
- $\{d,e,f\} - \{a,b,c\} = \{d,e,f\}$.

Utilizando as operações com conjuntos, podemos observar a seguinte propriedade:
$A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$.

Veja a representação geométrica desta propriedade:

Atividades de aprendizagem

Vamos verificar se você está acompanhando tudo até aqui? Procure, então, atender às atividades propostas.

1. Dados dois conjuntos *A* e *B*, e sabendo-se que *A* possui 23 elementos, *B* possui 37 elementos e *A* interseção com *B* possui 8 elementos, determine os elementos de *A* união com *B*.
2. Dados os intervalos $A = [1,4)$ e $B = (2,8]$, determinar os seguintes conjuntos:
   a) $A \cup B$
   b) $A \cap B$
   c) $A - B$
   d) $B - A$
   e) $C_{\mathbb{R}}(A)$
3. Sejam os conjuntos $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{2,4,6,8\}$. Determine o conjunto $(A \cup B) - (A \cap B)$.
4. Sejam os conjuntos $U = \{1,2,...,9\}$, $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,6,8\}$ e $C = \{3,4,5,6\}$. Determinar:
   a) A^c
   b) $(A \cap C)^c$
   c) B – C
5. Em cada caso, escreva o conjunto resultante com a simbologia de intervalo.
   a) $\{x \mid x \geq -1\} \cap \{x \mid -3 < x < 2\}$.
   b) $\{x \mid x < 2\} \cup \{x \mid x \geq 0\}$.
   c) $\{x \mid -3 < x \leq 1\} \cap \{x \mid x > 2\}$.
   d) $\{x \mid -2 < x \leq 3\} \cup \{x \mid x < 1\}$.
   e) $(-\infty,1) \cup [4, +\infty)$.

Exemplos práticos

Vamos ver, agora, alguns exemplos práticos de conjuntos.

Exemplo 1.1 A Prefeitura municipal da cidade de Alegria possui 630 servidores. Destes, 350 trabalham com Orçamento Público, 210 trabalham com Legislação Tributária e Comercial e 90 trabalham com os dois temas. Pergunta-se:

a) quantos servidores trabalham apenas com Orçamento Público (OP)?

b) quantos servidores trabalham apenas com Legislação Tributária (LT)?

c) quantos servidores trabalham com Orçamento Público ou Legislação Tributária?

d) quantos servidores não trabalham com nenhum dos dois temas?

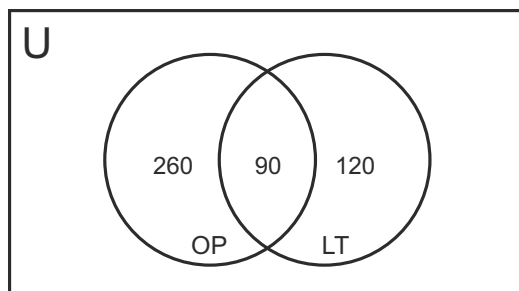
Resolução: Chamando:

$n\ (U)$ = número total de servidores = 630,

$n\ (OP)$ = número de servidores que trabalham com Orçamento Público = 350,

$n\ (LT)$ = número de servidores que trabalham com Legislação Tributária = 210,

$n\ (OP \cap LT)$ = número de servidores que trabalham com Orçamento Público e Legislação Tributária = 90.

Para melhor compreensão vamos fazer um diagrama? Veja sua construção, na figura, a seguir:

Conforme o diagrama apresentado anteriormente, você tem:

- Se 350 servidores trabalham com Orçamento Público e 90 deles com Orçamento Público e Legislação Tributária, então o número de servidores que trabalham apenas com Orçamento Público é $350 - 90 = 260$.
- Se 210 servidores trabalham com Legislação Tributária e 90 deles trabalham com ambos os temas, então o número de servidores que trabalham apenas com Legislação Tributária é $210 - 90 = 120$.
- $260 + 90 + 120 = 470$ servidores.
- $630 - 470 = 160$ servidores.

Exemplo 1.2 Suponha que numa conta bancária do tipo especial, você tenha saldo positivo de R$ 527,00. Em seguida, você dá dois cheques de R$ 78,50 e cinco cheques de R$ 84,20. Determine qual o seu saldo final.

Resolução: Neste exemplo você tem operações com os conjuntos numéricos. Ou seja, para saber o seu saldo final, fazemos:

$$527{,}00 - (2 \times 78{,}50) - (5 \times 84{,}20) = 527{,}00 - (157{,}00) - (421{,}00) = -51{,}00$$

Portanto, você ficou com saldo negativo no valor de R$ 51,00.

Vamos ver se você entendeu? Resolva o problema a seguir.

A balança eletrônica do restaurante "Comida Boa", quando vazia marca – 0,450 kg. Um cliente colocou o seu prato com a refeição na balança e ela marcou 0,750 kg. Se o prato utilizado tinha 0,450 kg, quantos gramas de comida havia no prato? Se o preço do quilo da comida no restaurante é de R$ 15,00, quanto o cliente pagou pela refeição?

Resposta: O cliente pagou R$ 11,25 pela refeição.

Exemplo 1.3 O funcionário do supermercado "Bom Preço" pesou 5 pacotes de um certo produto. Cada pacote deveria ter 20 kg. Mas uns tinham mais e outros menos de 20 kg. O funcionário anotou a diferença (em kg) em cada pacote:

$$-3 \quad +1 \quad -1 \quad -1 \quad +2$$

Determine o peso (em kg) dos 5 pacotes juntos.

Resolução: Aqui você tem operação com o conjunto dos inteiros relativos. Você calcula a diferença total dos cinco pacotes, isto é:

$$(-3) + (+1) + (-1) + (-1) + (+2) = -2.$$

Como os 5 pacotes deveriam ter juntos 100 kg, logo eles terão $100\ kg - 2\ kg = 98\ kg$.

Portanto, os 5 pacotes juntos pesam 98 kg.

Vamos ver se realmente ficou claro trabalhar com conjuntos? Deixamos para você resolver uma atividade a seguir.

Um carregador vai sair de uma câmara frigorífica do Supermercado “Bom e Barato” onde foi retirar carne bovina. Dentro dela, a temperatura é de *-19 °C*; fora dela a temperatura é de 26 *°C*. Calcule a diferença entre essas temperaturas.

Resposta: A diferença entre as temperaturas é 45 °C.

Exemplo 1.4 A variável descreve o lucro que uma empresa espera obter durante o atual ano fiscal. O departamento de vendas dessa empresa estimou um lucro de pelo menos 6 milhões de reais. Descrever este aspecto da previsão do departamento de vendas na linguagem matemática.

Resolução: O departamento de vendas requer que $x \geq 6$ (em que a unidade é milhões de reais). Isto equivale a dizer que na previsão do departamento de vendas x deverá pertencer ao intervalo $[6, \infty)$.

Atividades de aprendizagem

Vamos verificar se você está acompanhando os estudos propostos até o momento nesta Unidade? Para isso, procure resolver as atividades a seguir.

6. A Secretaria Municipal de Saúde da cidade de Arapongas, analisando as carteiras de vacinação das 84 crianças da creche Dona Benta, verificou que 68 receberam vacina Sabim, 50 receberam vacina contra sarampo e 12 não foram vacinadas. Quantas dessas crianças receberam as duas vacinas?
7. Duas creches da prefeitura municipal de Sossego, A e B, têm juntas 141 servidores. A creche B tem 72 servidores e as creches possuem em comum 39 servidores. Determinar o número de servidores da creche A.
8. Dois clubes, *A* e *B,* têm juntos 141 sócios. O clube *B* possui 72 sócios e os clubes possuem em comum 39 sócios. Determinar o número de sócios de *A*.
9. Observe o saldo bancário dos clientes abaixo e responda:

Cliente	Saldo (em R$)
Zaquel	+180,00
Jair	-100,00
Marcelo	-20,00
Joel	+135,00
Daniel	-60,00
Daniela	+14,00
Karoline	+80,00
Carolina	0,00

a) Quais clientes estão com saldo acima de R$ 120,00 positivos?

b) Quais clientes estão com saldo abaixo de R$ 50,00 negativos?

c) Quais clientes estão com saldo abaixo de R$ 120,00 positivos, mas acima de R$ 50,00 negativos?

10. Uma pessoa tem R$ 20.000,00 na sua conta bancária e faz, sucessivamente, as seguintes operações bancárias:

    a) Retira R$ 1.200,00;

    b) Deposita R$ 15.800,00;

    c) Retira R$ 28.000,00;

    d) Retira R$ 9.600,00.

    O saldo final fica positivo ou negativo? Em quanto?

11. O limite do cheque especial do Sr. Epaminondas é de R$ 3.000,00. No final do mês, na véspera do pagamento da prefeitura municipal em que era servidor, sua conta apresentava saldo negativo de –R$ 1.900,00. No dia seguinte, com seu salário creditado em conta, o saldo passou a ser positivo de R$ 540,00. Determinar o salário do Sr. Epaminondas.

12. A temperatura num refrigerador da cantina da creche Dona Pepa, da prefeitura municipal de Tororó, era de *–15 °C*. Faltou energia na cidade e a temperatura do refrigerador subiu *9°C*. A que temperatura se encontra agora o refrigerador?

Complementando.....

Para aprofundar os conceitos estudados nesta Unidade consulte:

- Teoria Elementar dos conjuntos – de Edgar Alencar Filho disponível em: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/conjuntos/conjunto.htm>. Acesso em: 1º jun. 2009.
- Ensino Superior: Álgebra: Relações – de Ulysses Sodré e Matias J. Q. Neto, disponível em: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/algebra/relacoes/relacoes.htm>. Acesso em: 1º jun. 2009.

Resumindo

Nesta Unidade você revisou a noção intuitiva de conjuntos, tipos de conjuntos, conjuntos numéricos e intervalos. Na próxima Unidade, você estudará produtos notáveis e frações.

Respostas das Atividades de aprendizagem

1. 52.

2. a) $[1,8]$. b) $(2,4)$. c) $[1,2]$.
   d) $[4,8]$. e) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 1 \text{ ou } x \geq 4\}$.

3. $\{1,3,6,8\}$.

4. a) $\{5,6,7,8,9\}$. b) $\{1,2,5,6,7,8,9\}$. c) $\{2,8\}$.

5. a) $[-1, 2)$. b) $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$. c) $\varnothing$.
   d) $(-\infty, 3]$. e) $(-2, 0]$.

6. 46 crianças.

7. 108 servidores.

8. 108.

9. a) Zaquel e Joel.
   b) Jair e Daniel.
   c) Marcelo, Daniela, Karoline e Carolina.

10. O saldo fica negativo em R$ 3.000,00.

11. R$ 2.440,00.

12. - 6 °C.

UNIDADE 2

Produtos Notáveis e Frações

Objetivos específicos de aprendizagem

Ao finalizar esta Unidade você deverá ser capaz de:

- Compreender produtos notáveis;
- Operar com frações; e
- Empregar a simplificação de frações algébricas.

Produtos notáveis

Nesta Unidade você vai aprender três tipos de produtos notáveis, conhecidos como quadrado de soma de dois números, quadrado de diferença de dois números e diferença de quadrado de dois números ou produto de soma pela diferença. Esses produtos facilitam algumas simplificações.

Você também vai aprender ainda nesta Unidade as frações. Os produtos notáveis são utilizados para simplificar frações quando envolvem divisões de frações. Vamos iniciar nosso estudo com os produtos notáveis. Lembre-se, conte sempre conosco!

Você certamente já ouviu o termo produto notável, não é?

Como o próprio nome já diz, significam produtos (multiplicação) que se destacam. São as multiplicações mais famosas da Matemática, que facilitam algumas simplificações. Por isso, são realmente muito notáveis!

Primeiro produto notável

Vejamos um destes produtos notáveis: $(a+b)^2$. Chamamos este produto notável, de **quadrado da soma** e sempre que o vemos no meio de uma expressão, podemos substituí-lo por $a^2 + 2ab + b^2$.

É importante observarmos que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Lê-se “**a** mais **b** ao quadrado é igual ao quadrado do primeiro mais duas vezes o primeiro vezes o segundo, mais o quadrado do segundo.”

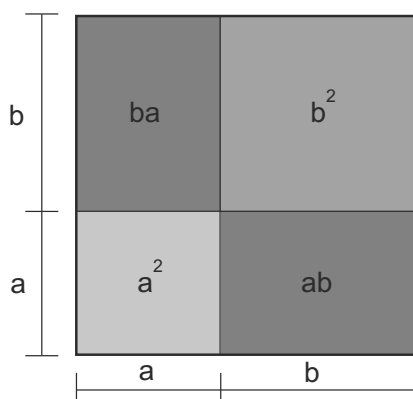
Mas você pode estar se perguntando: de onde tiramos tudo isso? Veja a seguir!

Sabe-se que para calcular um número ao quadrado basta multiplicar este número por ele mesmo, por exemplo: $3^2 = 3{\cdot}3$, que é igual a 9. Então calcular $(a+b)^2$ será $(a+b)$ vezes $(a+b)$, certo? Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação, temos:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b)$$
$$= a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b$$
$$= a^2 + 2ab + b^2, \text{ pois } ab = ba.$$

Então é verdade que:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Geometricamente representamos este produto da seguinte forma:

Observe que o quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do 1º termo, mais duas vezes o produto do 1º termo pelo segundo, mais o quadrado do 2º termo.

Conheça alguns exemplos de produto notável e não hesite em consultar seu tutor em caso de dúvida.

- $(x+5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25.$
- $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot (2x)\, 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9.$
- $(a^3+b^2)^2 = (a^3)^2 + 2a^3b^2 + (b^2)^2 = a^6 + 2a^3b^2 + b^4.$

Segundo produto notável

Existem três produtos notáveis que você não pode deixar de conhecer. O primeiro deles acabamos de ver. O segundo produto notável que precisamos ter o conhecimento (antes das provas, é claro) é bem parecido com o primeiro. Veja:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

De fato,

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)\cdot(a-b)\\ &= a\cdot a + a\cdot(-b) + (-b)\cdot a + (-b)\cdot(-b)\\ &= a^2 - 2ab + b^2,\end{aligned}$$

pois $a(-b)=(-b)a = -ab$ e $(-b)\cdot(-b) = b^2$.

Observou qual a diferença entre o primeiro e o segundo produto notável?

Muito bem a diferença é o sinal de menos. Então tudo o que vimos para o anterior vale também para este aqui!

Atenção! O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do 1º termo, menos duas vezes o produto de 1º termo pelo segundo, mais o quadrado do 2º termo.

Conheça alguns exemplos do segundo produto notável.

- $(x-5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot (-5) + (-5)^2 = x^2 - 10x + 25$.
- $(2x-3)^2 = (2x)^2 + 2\,(2x)\,(-3) + (-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$.
- $(a^3-b^2)^2 = (a^3)^2 + 2a^3\,(-b^2) + (-b^2)^2 = a^6 - 2a^3b^2 + b^4$.

Terceiro produto notável

O terceiro produto notável é chamado **produto da soma pela diferença**. Veja:

$$(a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2$$

Este é muito fácil de calcular. O importante é você saber que neste caso o resultado será o quadrado do primeiro termo (a) menos o quadrado do segundo termo (b). Veja:

$$(a+b)\,(a-b) = a \cdot a + a \cdot (-b) + b \cdot a + b \cdot (-a)$$
$$= a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ba} + b^2 = a^2 - b^2.$$

Vamos ver alguns exemplos:

- $(x - 5)\ (x + 5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$.
- $(2x + 3)\ (2x - 3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$.
- $(a^2 + b)\ (a^2 - b) = (a^2)^2 - b^2 = a^4 - b^2$.
- $(\sqrt{x} + \sqrt{y})\ (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = x - y$.

Resumindo, os três produtos notáveis são dados por:

- $(a + b) \cdot (a + b)$ ou $(a + b)^2$, quadrado da soma de dois termos.
- $(a - b) \cdot (a - b)$ ou $(a - b)^2$, quadrado da diferença de dois termos.
- $(a - b) \cdot (a - b)$, produto da soma pela diferença de dois termos.

Frações

Iniciamos esta seção com uma pergunta. Para você o que é uma fração?

Fração é um número que exprime uma ou mais partes iguais em que foi dividida uma unidade ou um inteiro.

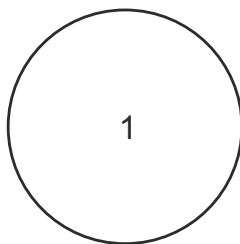
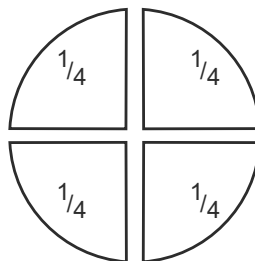
Assim, por exemplo, se tivermos uma barra de chocolate inteira e a dividimos em quatro partes iguais, cada parte representará uma parte da barra de chocolate, ou seja, uma fração da barra de chocolate.

Uma barra de chocolate inteira

1

Quatro pedaços da barra de chocolate

$4 \times \frac{1}{4}$

Veja a seguir mais um exemplo:

Uma pizza inteira

Quatro fatias iguais da mesma pizza

$4 \times \frac{1}{4}$

Se quisermos saber "**Qual o significado de uma fração?**", então dizemos que uma fração significa dividir algo em partes iguais. Assim: $\frac{a}{b}$ indica *a* : *b*, sendo a e b números naturais e b diferente de 0, onde **a** representa o numerador e **b**, o denominador.

O numerador indica quantas partes são tomadas do inteiro e o denominador indica em quantas partes dividimos o inteiro, sendo que este número inteiro deve necessariamente ser diferente de zero.

Quando o numerador é 1 e o denominador é um inteiro maior que 10, lemos: 1, o denominador e acrescentamos a palavra avos. Por exemplo, $\frac{1}{12}$: leitura um doze avos.

Leitura de frações

Fração	Leitura
$\frac{1}{2}$	Metade
$\frac{1}{3}$	Um terço
$\frac{2}{4}$	Dois quartos
$\frac{5}{8}$	Cinco oitavos
$\frac{9}{7}$	Nove sétimos
$\frac{3}{4}$	Três quartos
$\frac{1}{18}$	Um dezoito avos

A seguir resolveremos alguns exemplos práticos de frações.

Exemplo 2.1 Um livro de Matemática tem 200 páginas. Uma aluna já leu $\frac{2}{5}$ desse livro. Quantas páginas faltam para ela terminar a leitura?

Resolução: Este é um exemplo típico de frações. Para resolver prosseguirmos assim:

$$\frac{2}{5}x\,200 = \frac{2\,x\,200}{5} = \frac{400}{5} = 80.$$

Encontramos $\frac{2}{5}$ como sendo 80, ou seja, ela já leu 80 páginas do livro. Como o livro tem 200 páginas, logo, 200 – 80 = 120 é a resposta, ou seja, ainda faltam 120 páginas para terminar o livro.

Deixamos para você resolver a atividade a seguir. Veja se você entendeu.

No armazém do senhor Natanael Bom de Bico há uma lata com 10 kilos de azeitona que ele pretende embalar em pacotes de $\frac{1}{4}$ kg. Quantos pacotes ele vai conseguir fazer?

Resposta: 40 pacotes.

Igualdade de frações

Duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são iguais se e somente se $a \cdot d = b \cdot c$, ou seja,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a{\cdot}d = b{\cdot}c,\ b \neq 0 \text{ e } d \neq 0.$$

Nestes casos dizemos que as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são **equivalentes**.

Conheça a seguir alguns exemplos de igualdade de frações:

- $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$, pois $3 \cdot 15 = 9 \cdot 5 = 45$.
- Calcule o valor de x, de modo que as frações sejam iguais ou equivalentes.

$$\frac{1}{x} = \frac{4}{8}.$$

Aplicando a definição de igualdade de frações podemos escrever:

$$\frac{1}{x} = \frac{4}{8} \Leftrightarrow 1 \cdot 8 = 4 \cdot x,$$

ou seja,

$$8 = 4x \Leftrightarrow x = \frac{8}{4} = 2.$$

Operações com frações

Nesta subseção você vai aprender sobre operações com frações, tais como soma, diferença, produto e divisão de frações. Estas operações são importantes para simplificarmos as frações.

Soma e diferença de frações

Para fazermos a soma ou a diferença entre frações devemos primeiramente verificar se os denominadores são iguais.

Se forem iguais, basta somar ou subtrair o numerador, pois estaremos somando ou subtraindo "partes iguais do inteiro". Veja os exemplos:

- $\frac{1}{7} + \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$.
- $\frac{8}{5} - \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$.

Mas caso os denominadores sejam diferentes, devemos encontrar o mínimo múltiplo comum (m.m.c.) e transformar em frações de mesmo denominador para depois efetuarmos as operações.

Vamos resolver alguns exemplos para verificar seu entendimento?

Exemplo 2.2 Simplifique a seguinte fração: $\frac{2}{3} + \frac{5}{8}$.

Resolução: Para reduzir ao mesmo denominador você determina o menor múltiplo comum (m.m.c.) de 3 e 8 que é 24, ou seja, m.m.c.(3,8) = 24. Logo:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{8} = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{3} = \frac{16}{24} + \frac{15}{24} = \frac{16+15}{24} = \frac{31}{24}.$$

Portanto,

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{8} = \frac{31}{24}.$$

Exemplo 2.3 Simplifique a fração a seguir: $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$.

Resolução: Aqui, o m.m.c. de 2 e 4 é 4, ou seja, *m.m.c* (2,4) = 4 e vem:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=\frac{2+3}{4}=\frac{5}{4}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}.$$

Exemplo 2.4 Simplifique a seguinte fração: $\frac{4}{5}+\frac{3}{10}+\frac{1}{6}$.

Resolução: Aqui você tem a soma de três frações. Calculando o *m.m.c* de (5, 10, 60) temos como resultado o número 30, ou seja, *m.m.c* (5, 10, 60) = 30. Então a simplificação fica assim:

$$\frac{4}{5}+\frac{3}{10}+\frac{1}{6}=\frac{24}{30}+\frac{9}{30}+\frac{5}{30}=\frac{24+9+5}{30}=\frac{38}{30}=\frac{19}{15}.$$

Portanto,

$$\frac{4}{5}+\frac{3}{10}+\frac{1}{6}=\frac{19}{15}.$$

Exemplo 2.5 Simplifique a fração $\frac{3}{5}-\frac{2}{7}$.

Resolução: O m.m.c. de 5 e 7 é 35, logo:

$$\frac{3}{5}-\frac{2}{7}=\frac{21}{35}-\frac{10}{35}=\frac{11}{35}.$$

Portanto,

$$\frac{3}{5}-\frac{2}{7}=\frac{11}{35}.$$

Para conferir se você está acompanhando, deixamos três alternativas para você resolver antes de prosseguir seus estudos!

a) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$.

b) $\frac{5}{7}-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}$.

c) $\frac{2}{8}+\frac{1}{4}-4$.

Resposta:

a) $\frac{22}{15}$

b) $\frac{65}{42}$

c) $-\frac{7}{2}$

Produto de frações

O produto de frações implica na multiplicação do numerador com o numerador e do denominador com o denominador. Se necessário, simplifique o produto.

Para b e d diferentes de zero, temos:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Por exemplo,

- $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2.4}{3.5}=\frac{8}{15}$.
- $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{1.3.2}{4.5.7}=\frac{6}{140}$.

Você pode simplificar o item (ii) da seguinte maneira:

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{1.3.2}{4.5.7}=\frac{6}{140}=\frac{\cancel{2}.3}{\cancel{2}.70}=\frac{3}{70}.$$

Divisão de frações

Na divisão de frações, vamos multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda e se necessário devemos simplificar.

Considerando $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ duas frações, onde b e c são diferentes de zero, a divisão entre essas duas frações é dada por

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

Conheça a seguir alguns exemplos de divisão entre frações.

- $\frac{\frac{5}{7}}{\frac{2}{9}}=\frac{5}{7}\cdot\frac{9}{2}=\frac{45}{14}.$
- $\frac{\frac{2}{3}}{4}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{1}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{12}=\frac{\cancel{2}.1}{\cancel{2}.6}=\frac{1}{6}.$

Agora é sua vez! Deixamos para você resolver as seguintes frações:

a) $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{10}}$.

b) $\dfrac{\frac{3}{2}}{5}$.

Resposta:

a) 6

b) $\dfrac{3}{10}$

A seguir apresentaremos alguns exemplos resolvidos envolvendo as frações e cálculos algébricos.

Exemplo 2.6 Simplifique a fração: $\dfrac{2 \cdot 3 \cdot 11}{3 \cdot 7 \cdot 11}$.

Resolução: $\dfrac{2 \cdot \not{3} \cdot \not{11}}{\not{3} \cdot 7 \cdot \not{11}} = \dfrac{2}{7}$.

Aqui neste exemplo podemos observar que 3 e 11 são comuns ao numerador e ao denominador. Nesta situação podemos cancelá-los para encontrarmos a simplificação.

Exemplo 2.7 Simplifique a fração: $\dfrac{2abc}{5abx}$.

Resolução: $\dfrac{2abc}{5abx} = \dfrac{2 \cdot \not{a} \cdot \not{b} \cdot c}{5 \cdot \not{a} \cdot \not{b} \cdot x} = \dfrac{2\,c}{5\,x}$.

Nessa fração observe que a e b estão no numerador e denominador, então novamente você pode cancelar, desde que eles sejam diferentes de zero, isto é, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Exemplo 2.8 Simplifique a fração: $\dfrac{a^2+ab}{a^2-b^2}$.

Resolução: $\dfrac{a^2+ab}{a^2-b^2}=\dfrac{a\,.(\cancel{a+b})}{(\cancel{a+b}).(a-b)}=\dfrac{a}{(a-b)}$.

Nessa fração nos deparamos com as expressões a^2+ab e a^2-b^2 como fatores. Utilizando os produtos notáveis, isto é: $a^2+ab = a(a+b)$ e $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$, conseguimos cancelar $(a+b)$ no numerador e no denominador.

Veja se entendeu. Procure resolver as operações de frações que separamos para você.

a) $\dfrac{5a}{3b^2}\cdot\dfrac{4b^3}{5a^2}$.

Resposta: $\dfrac{4b}{3a}$

b) $\dfrac{2y^2}{x}\div\dfrac{5y^6}{2a}$.

Resposta: $\dfrac{4a}{5xy^4}$

Exemplo 2.8 Simplifique a fração: $\dfrac{x-2y}{2y-x}$.

Resolução: $\dfrac{x-2y}{2y-x}=\dfrac{-(2y-x)}{2y-x}=\dfrac{-1}{1}=-1.$

Nessa fração você primeiro coloca (–) em evidência no numerador e depois cancela $2y-x$ $(2y \neq x)$ que está no numerador e no denominador e obtêm como resultado final –1.

Exemplo 2.9 Simplifique a fração: $\dfrac{x+5}{x^2-25}$.

Resolução: $\dfrac{x+5}{x^2-25} = \dfrac{\cancel{x+5}}{\cancel{(x+5)}.(x-5)} = \dfrac{1}{x-5}$, $x \neq 5$.

Observe que nesta fração primeiro fatoramos o denominador aplicando o produto notável $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ e depois cancelamos $x + 5$ para encontrar a simplificação.

Exemplo 2.10 Simplifique a fração: $\dfrac{5}{2a} + \dfrac{3}{x}$.

Resolução: $\dfrac{5}{2a} + \dfrac{3}{x} = \dfrac{5x+6a}{2ax}$, pois $m.m.c.\ (2a, x) = 2ax$.

Exemplo 2.11 Simplifique a fração: $\dfrac{2x}{y} + \dfrac{1}{3xy} - \dfrac{y}{4x}$.

Resolução: O $m.m.c.\ (y, 3xy, 4x) = 12xy$.

Logo,

$$\frac{2x}{y} + \frac{1}{3xy} - \frac{y}{4x} = \frac{24x^2}{12xy} + \frac{4}{12xy} - \frac{3y^2}{12xy} = \frac{24x^2 + 4 - 3y^2}{12xy}.$$

Exemplo 2.12 Simplifique a fração: $\dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{5x^4}{x^2-1}$.

Resolução: Note, neste exemplo, que os denominadores apresentam a mesma expressão. Nesta situação basta simplificarmos os numeradores juntando suas expressões. Observe a seguir:

$$\frac{2}{x^2-1} - \frac{5x^4}{x^2-1} = \frac{2-5x^4}{x^2-1}.$$

Veja se você entendeu a resolução das frações resolvendo as seguintes frações:

a) $\dfrac{5a}{3b^2} \div \dfrac{4b^3}{5a^2}$.

b) $\dfrac{\dfrac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}}{\dfrac{x}{x^2 + 1}}$.

Resposta:

a) $\dfrac{25a^3}{12b^5}$

b) $\dfrac{2x^2 - 1}{x}$

Atividades de aprendizagem

Antes de prosseguirmos vamos verificar se você entendeu tudo até aqui! Para saber, procure, então, realizar as atividades a seguir. Caso tenha dúvidas, faça uma releitura cuidadosa dos conceitos ou resultados ainda não entendidos.

1. Desenvolva os produtos notáveis abaixo:

   a) $(x-4)^2$.

   b) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$.

   c) $\left(\frac{x}{2}-2\right)\left(\frac{x}{2}+2\right)$.

   d) $\left(\frac{3x}{4}-\frac{2}{5}\right)^2$.

2. Simplifique as frações abaixo:

   a) $\frac{11.13.23}{11.23.29}$.

   b) $\frac{80}{200}$.

   c) $\frac{ac-c}{c^2-c}$.

   d) $\frac{3c+3y}{3-3a}$.

   e) $\frac{x^2-25}{7x-35}$.

3. Efetue as divisões:

   a) $\dfrac{3x}{7a} \div \dfrac{b}{2x}$.

   b) $\dfrac{x}{a+1} \div \dfrac{x^4}{a^2-1}$.

   c) $\dfrac{x+y}{7x-7y} \div \dfrac{x^2+xy}{7x}$.

4. Efetue as multiplicações:

   a) $\dfrac{x+2}{x} \cdot \dfrac{x-2}{2x}$.

   b) $\dfrac{a}{a-4} \cdot \dfrac{a^2-16}{ax}$.

   c) $\dfrac{15a}{x^2-4} \cdot \dfrac{xy+2y}{5a}$.

5. Um livro de Administração Financeira tem 156 páginas. A aluna Marta Rocha já leu $\dfrac{9}{13}$ desse livro. Quantas páginas faltam para ela terminar a leitura?

6. Na Prefeitura Municipal de Vitalidade o professor de Atividades Esportivas verificou que $\dfrac{1}{3}$ dos servidores pratica voleibol. Se a prefeitura tem 42 servidores, quantos servidores:

   a) praticam voleibol?

   b) não praticam este esporte?

7. Um aluno do curso de Administração Pública na modalidade a distância da UAB é obrigado a frequentar, no mínimo $\dfrac{3}{4}$ do número de horas aulas dadas durante o período letivo. Se forem dadas 900 horas aulas, quantas horas aulas, no mínimo, ele terá que frequentar?

8. A secretaria de obras da prefeitura de Bom Descanso tem em seu almoxarifado 7.225 azulejos. Eles têm o formato quadrado e são todos do mesmo tamanho. Usando todos esses azulejos, ela pretende revestir uma parede quadrada da cozinha da creche Tia Lili. Quantos azulejos serão colocados na parede?

Complementando.......

Para aprofundar os conceitos estudados nesta Unidade consulte:

- *Vencendo a matemática* – de Miguel Assis Name.
- Produtos notáveis – de Paula Rose disponível no do Portal Interaula <http://www.interaula.com/versao1.3/matematica/mat00001_01.htm> Acesso em: 1º de jun. 2009.
- Ensino Fundamental: Frações – de Patrícia E. Silva e Ulysses Sodré, disponível em: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/fracoes/fracoes.htm> Acesso em: 1º de jun. 2009.

Resumindo

Nesta Unidade você aprendeu como operar e simplificar frações, bem como fazer simplificação algébrica. Aprendeu também as noções básicas de produtos notáveis. A partir da próxima Unidade iremos estudar razões, proporções e porcentagem.

Respostas das Atividades de aprendizagem

1. a) $x^2 - 8x + 16$ b) $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$.

c) $\frac{x^2}{4} - 4$. d) $\frac{9x^2}{16} - \frac{3}{5}x + \frac{4}{25}$.

2. a) $\frac{13}{29}$. b) $\frac{2}{5}$.

c) $\frac{a-1}{c-1}$. d) $\frac{c+y}{1-a}$.

e) $\frac{x+5}{7}$.

3. a) $\frac{6x^2}{7ab}$. b) $\frac{a-1}{x^3}$. c) $\frac{1}{x-y}$.

4. a) $\frac{x^2-4}{2x^2}$. b) $\frac{a+4}{x}$. c) $\frac{3y}{x-2}$.

5. 48 páginas.

6. a) 14. b) 28.

7. 675 horas aulas.

8. 85 azulejos.

UNIDADE 3

Razões, Proporções e Porcentagem

Objetivos específicos de aprendizagem

Ao finalizar esta Unidade você deverá ser capaz de:

- Descrever e calcular razão, proporção e porcentagem;
- Aplicar regra de três; e
- Aplicar grandezas diretamente proporcionais.

Introdução

Caro estudante!

O que vamos aprender nesta Unidade tem grande importância, não apenas em Matemática como, também, em sua vida. Estudaremos assuntos relacionados à aplicação dos conceitos de razão, proporção e porcentagem, assuntos constantes em nosso cotidiano. Trabalharemos problemas simples e rápidos, como um desconto numa loja em liquidação e problemas mais complexos relativos à inflação ou à taxa de juros, por exemplo. Para tanto é necessário que você dedique-se ao estudo desta Unidade, aproveitando-se deste momento que é fundamental para sua formação. Leia, pesquise, realize as atividades e busque auxílio de seu tutor em caso de dúvidas.

Bons estudos.

Trataremos de razão, conceito antigo e essencial para o conhecimento matemático e que, a princípio, é usado para comparar duas quantidades ou duas medidas. Na sociedade moderna, o conceito de razão surge nos jornais e nas revistas para comunicar a concentração de pessoas em uma determinada cidade ou o fluxo de carros em um pedágio. Aparece também nas mais variadas áreas do conhecimento, sempre para melhorar a comparação de vários dados de um problema.

Outro termo que iremos estudar nesta Unidade diz respeito à proporção. Embora sem empregar símbolos matemáticos fazemos uso da proporção em nossas palavras e em nosso dia a dia. Por exemplo, quando fazemos um comentário sobre a construção de um viaduto, dizendo que "ele tem uma extensão muito grande",

não estamos nos referindo à medida absoluta da extensão do viaduto. Em um viaduto, a sua extensão pode ser "muito grande", mesmo medindo a metade, um quarto ou um décimo da extensão verdadeira; é “muito grande” **proporcionalmente** ao conjunto de todo o viaduto. O estudo das proporções é para nós, nesta Unidade, de inestimável valor, pois todos os tópicos a serem desenvolvidos têm nas proporções o seu alicerce.

Outro assunto que iremos abordar nesta Unidade refere-se às porcentagens que são utilizadas desde o final do século XV e têm grande presença na Economia, na Geografia e em várias outras áreas da atividade humana, como calcular taxas de juros e também ganhos e perdas. Na Antiguidade, no tempo do imperador romano Augusto, os soldados tinham parte do seu salário descontado e este valor era calculado mediante uma taxa (razão de 1 para 100) denominada *centésima rerum venalium*. O símbolo %, usado até hoje, foi criado no século XVII por comerciantes ingleses.

Razão

A palavra razão vem do latim *ratio* e significa a divisão ou o quociente entre dois números *a* e *b*, denotada por $\frac{a}{b}$ ou *a* : *b*, onde *a* é chamado de **antecedente** e *b* é chamado de **consequente**.

Assim podemos denominar **como** razão de dois números, diferentes de zero, o quociente formado por eles. Por exemplo, suponhamos que numa sala de aula haja 35 estudantes, sendo 28 destes, homens. Observe que a razão entre o número de estudantes homens e o total de estudantes da sala é dada por $\frac{28}{35}$.

Conheça agora mais alguns exemplos de razão:

- Das 200 pessoas entrevistadas, 70 preferem o candidato A. Isto é, $\frac{70}{200}=\frac{7}{20}$. Ou seja, de cada 20 entrevistados, 7 preferem o candidato A.
- Dos 1.200 inscritos num concurso, passaram 240 candidatos. Isto é, $\frac{240}{1.200}=\frac{1}{5}$. Ou seja, de cada 5 candidatos inscritos, 1 foi aprovado.
- Para cada 100 convidados, 75 eram mulheres. Isto é, $\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$. De cada 4 convidados, 3 eram mulheres.

Razões inversas

Consideramos razões **inversas** aquelas cujo produto é igual a 1, ou seja, $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$, o que implica que as razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{b}{a}$ são inversas. Por exemplo, as razões $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{3}$ são inversas, pois:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{12}{12} = 1.$$

Razões especiais

Grandeza é uma relação numérica estabelecida com um objeto. Assim, a altura de um edifício, o volume de um tanque de combustível, o peso de um equipamento, a quantidade de horas para executar uma tarefa, entre outros, são grandezas. **Grandeza** é tudo que você pode contar, medir, pesar, enfim, enumerar.

A seguir explicaremos razões especiais entre grandezas diferentes considerando situações práticas, por exemplo, consumo médio, velocidade média, densidade etc.

Velocidade média

A velocidade média é a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto em percorrê-la. Por exemplo, imagine que uma pessoa fez o percurso Rio de Janeiro – São Paulo (450 km) em 5 horas.

Você sabe qual a razão entre as medidas dessas grandezas e o que significa essa razão?

$$\text{Razão} = \frac{450\text{Km}}{5\text{h}} = 90\text{Km/h}.$$

Muito bem, esta razão nos informa que a cada hora foram percorridos em média 90 km. Neste caso, a velocidade média foi calculada pela razão entre distância percorrida e tempo gasto.

Consumo médio

O calculo do consumo médio implica em determinarmos a média de consumo para uma dada distância. Suponha que seu amigo foi de São Paulo a Campinas (92 km) de carro e gastou nesse percurso 8 litros de combustível. Qual a razão entre a distância e o combustível consumido? O que significa esta razão?

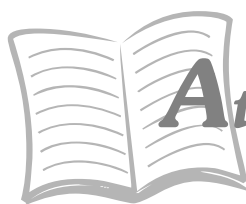
$$\text{Razão} = \frac{92\text{Km}}{8\text{litros}} = 11{,}5\text{Km/litro.}$$

Observe que a cada litro consumido foram percorridos em média 11,5 Km, ou seja, o consumo médio foi calculado sobre a distância percorrida dividida pelo combustível gasto.

Densidade demográfica

A densidade demografia é a razão entre o número de habitantes de uma região e a área dessa região. Por exemplo, o estado do Ceará, em um de seus censos, teve uma população avaliada em 6.701.924 habitantes. Sua área é de 145.694 Km^2. Determine a razão entre o número de habitantes e a área desse estado. O que significa essa razão?

$$\text{Razão} = \frac{6.701.924\text{ hab}}{145.694\text{Km}^2} = 46\text{ hab/Km}^2.$$

Significa que em cada quilômetro quadrado existem em média 46 habitantes.

Atividades de aprendizagem

Agora chegou a hora de analisarmos se você está entendendo o que estudamos até aqui! Para saber, procure, resolver as atividades propostas a seguir. Lembre-se: você pode contar com o auxilio de seu tutor.

1. Numa classe de 40 alunos, 32 foram aprovados. Determine a razão entre o número de alunos:
   a) aprovados e o total de alunos;
   b) reprovados e o total de alunos; e
   c) aprovados e o número de alunos reprovados.
2. Numa salada de frutas foram utilizados 4 abacaxis, 20 bananas, 8 laranjas, 6 maçãs e 2 mamões. Determine a razão entre o número:
   a) de abacaxis e o número de laranja;
   b) de laranjas e o número de bananas;
   c) de maçãs e o número de mamões;
   d) de bananas e o número de laranjas;
   e) de bananas e o total de frutas; e
   f) total de frutas e o número de mamões.
3. O país ZZZ tem uma área de 500.000 Km² e uma população de 40.000 habitantes. Qual a sua densidade demográfica?
4. A população do Estado AAAAAA é de 16.400.000 habitantes, sendo 5.528.000 mulheres. Qual a razão entre o número de mulheres e o número de habitantes?

Proporção

Chamamos de proporção a comparação entre duas razões. Assim para entendermos o que é uma proporção devemos saber o que é razão, já que proporção é a igualdade de duas razões. Por exemplo:

- $\frac{3}{4}=\frac{27}{36}$ é uma proporção, pois 3 : 4 = 27 : 36, e podemos ler assim: "3 está para 4 assim como 27 está para 36".
- $\frac{5}{6}=\frac{10}{12}$ é uma proporção, pois 5 : 6 = 10 : 12.
- $\frac{2}{7}=\frac{6}{21}$ é uma proporção, pois 2 : 7 = 6 : 21.

Dados quatro números racionais **a**, **b**, **c** e **d**, **não nulos**, nessa ordem, dizemos que eles formam uma proporção quando a razão do primeiro para o segundo for igual à razão do terceiro para o quarto. Assim

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ ou a : b = c : d,}$$

onde *a* e *d* são os **extremos** e *b* e c são os **meios**.

Propriedades

As proporções apresentam algumas propriedades fundamentais, dadas a seguir.

P1. Em toda proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Exemplos:

- $\frac{5}{12} = \frac{10}{24} \Leftrightarrow 5 \cdot 24 = 12 \cdot 10.$
- $\frac{2}{7} = \frac{6}{21} \Leftrightarrow 2 \cdot 21 = 7 \cdot 6.$
- Determine o valor desconhecido na proporção $\frac{5}{8} = \frac{15}{x}$ é obtido da seguinte forma:

$$5 \cdot x = 8 \cdot 15 \Leftrightarrow 5x = 120 \Leftrightarrow x = \frac{120}{5} = 24.$$

P2. A soma (diferença) dos antecedentes está para a soma (diferença) dos consequentes, assim como cada antecedente está para o seu consequente, ou seja numa proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos:

- $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$, ou $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$.
- $\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$, ou $\frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}$.

Exemplo:

Na proporção, $\frac{15}{24} = \frac{5}{8}$ você tem

$$\frac{15+5}{24+8} = \frac{15}{24} \text{ ou } \frac{15+5}{24+8} = \frac{5}{8},$$

ou ainda,

$$\frac{15-5}{24-8}=\frac{15}{24} \text{ ou } \frac{15-5}{24-8}=\frac{5}{8}.$$

Números proporcionais

Há dois tipos de proporcionalidade entre os números racionais, uma diretamente e outra indiretamente.

Diretamente: Os números racionais a, b e c são **diretamente proporcionais** aos números racionais x, y e z quando se tem:

$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=k$, onde k é uma constante.

Exemplo 3.1 Verificar se os números 4, 10 e 30 são diretamente proporcionais aos números 8, 20 e 60.

Resolução: Você tem $a=4$; $b=10$ e $c=30$, $x=8$; $y=20$ e $z=60$. Logo,

$$\frac{4}{8}=\frac{1}{2},\ \frac{10}{20}=\frac{1}{2},\frac{30}{60}=\frac{1}{2}.$$

Como $\frac{4}{8}=\frac{10}{20}=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}$, portanto, os números 4, 10 e 30 são diretamente proporcionais aos números 8, 20 e 60 e $k=\frac{1}{2}$.

Exemplo 3.2 Verificar se os números 12, 48 e 96 são diretamente proporcionais aos números 20, 80 e 160. Logo,

Resolução: Como $\frac{12}{20}=\frac{48}{80}=\frac{96}{160}=\frac{3}{5}$, podemos dizer que os números 12, 48 e 96 são diretamente proporcionais aos números 20, 80 e 160 e $k=\frac{3}{5}$ é uma constante.

Inversamente: Os números racionais a, b e c são **inversamente proporcionais** aos números racionais x, y e z quando se tem:

$x \cdot a = y \cdot b = z \cdot c = k$, onde k é uma constante.

Exemplo 3.3 Verificar se os números 120, 30 e 16 são inversamente proporcionais aos números 2, 8 e 15.

Resolução. Você tem a=120; b=30 e c=16, x=2; y=8 e z=15. Logo,

$$120 \cdot 2 = 240 \cdot 30 \cdot 8 = 240 \cdot 16 \cdot 15 = 240.$$

Como $120 \cdot 2 = 30 \cdot 8 = 16 \cdot 15 = 240$, portanto os números são inversamente proporcionais e $k = 240$.

Exemplo 3.4 Verificar se os números 2, 3 e 6 são inversamente proporcionais aos números 18, 12 e 6.

Resolução. Como $2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 6 \cdot 6 = 36$, podemos dizer que os números 2, 3 e 6 são inversamente proporcionais aos números 18, 12 e 6 e $k = 36$ é uma constante.

Regra de três simples e regra de três composta

A regra de três simples é um processo prático para resolver problemas que envolvam quatro valores dos quais conhecemos três deles. Devemos, portanto, determinar um valor a partir dos três já conhecidos.

Podemos dizer ainda que a regra de três é uma técnica para resolver problemas que envolvem duas grandezas proporcionais, e a **regra de três composta** é uma técnica para resolver problemas que envolvem mais de duas grandezas.

Quando duas grandezas variam sempre na mesma razão da outra, dizemos que essas grandezas são **diretamente proporcionais**. Quando variam sempre uma na razão inversa da outra, dizemos que essas grandezas são **inversamente proporcionais**.

Exemplo 3.5 Um ingresso de show custa R$ 20,00, então, o custo de 5 bilhetes será?

Grandeza 1: Número do bilhete

Grandeza 2: Preço do bilhete

Resolução: 1 bilhete = R$ 20,00
5 bilhetes = R$ 20,00 $\times$ 5
Total: R$ 100,00

Chegou a sua vez! Veja se você entendeu resolvendo a questão que separamos para você.

Um automóvel percorre um espaço de 200 km em 4 horas. Quantos km ele percorrerá em 6 horas?

Resposta: 300 km.

Passos utilizados numa regra de três simples:

1º passo: Construir uma tabela, agrupando as grandezas da mesma espécie em colunas e mantendo na mesma linha as grandezas de espécies diferentes em correspondência.

2º passo: Identificar se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais.

3º passo: Montar a proporção e resolver a equação.

Atenção: como sugestão inicialmente você pode colocar uma seta para baixo na coluna que contém a grandeza procurada. Em seguida, nas demais colunas, você coloca a seta na mesma direção para as grandezas diretamente proporcionais e em direção contrária para as grandezas inversamente proporcionais.

Para um melhor entendimento acompanhe com atenção os exemplos, a seguir, que separamos para você.

Exemplo 3.6 Um trator faz 150 metros de estrada em 30 dias. Trabalhando do mesmo modo em quantos dias fará 350 metros de estrada?

Resolução:

Comprimento (m)	tempo (dias)
150 ↓	30 ↓
350	x

$$\frac{150}{350} = \frac{30}{x} \quad \Rightarrow \quad x = 70 \text{ dias.}$$

Portanto, trabalhando do mesmo modo o trator fará 350 metros de estrada em 70 dias.

Exemplo 3.7 Um automóvel com velocidade média de 80 Km/h percorre certa distância em 5 horas. Em quanto tempo percorrerá essa mesma distância em velocidade média de 100 Km/h?

Resolução:

Velocidade (Km/h)	tempo (dias)
80 ↑	5 ↓
100	x

$$\frac{100}{80} = \frac{5}{x} \quad \Rightarrow \quad x = 4 \text{ horas.}$$

Observe que o tempo para percorrer a mesma distância é de 4 horas.

Agora se você precisar resolver problemas com mais de duas grandezas, direta ou inversamente proporcionais, você deve utilizar a regra de três composta. Veja alguns exemplos.

Exemplo 3.8 Em 8 horas, 20 caminhões descarregam 160 m^3 de areia. Em 5 horas, quantos caminhões serão necessários para descarregar 125 m^3?

Resolução:

Horas	caminhões	volume (m^3)
8 ↑	20 ↓	160 ↓
5	x	125

Igualando a razão que contém o termo com o produto das outras razões de acordo com o sentido das setas, você tem

$$\frac{20}{x} = \frac{160}{125} \times \frac{5}{8} \qquad \Rightarrow \; x = 25.$$

Portanto, serão necessários 25 caminhões.

Teste seu entendimento resolvendo a atividade a seguir.

Um pintor, gasta 5 galões de tinta para pintar um muro de 20 metros de comprimento e 5 metros de altura. Quantos galões ele gastaria para pintar um muro de 15 metros de comprimento e 3 metros de altura?

Resposta: 2,25 galões.

Vamos verificar se você está acompanhando tudo até aqui! Para saber, procure, então, responder às atividades propostas a seguir. Caso tenha dúvidas, faça uma releitura cuidadosa dos conceitos ou resultados ainda não entendidos.

5. Determine o valor de *k*, sabendo que os números 4*k* – 1, 50, *k*+5 e 20 formam uma proporção nessa ordem.
6. Num restaurante, de cada 10 cervejas vendidas, 6 são da marca D. Num domingo foram vendidas 500 cervejas. Quantas cervejas da marca D foram vendidas?
7. Um avião consome 400 litros de gasolina por hora. Calcule o consumo dessa aeronave em 3,5 horas de vôo.
8. Determine o valor desconhecido nas proporções abaixo.

a) $\dfrac{x-3}{2x+1} = \dfrac{4}{5}$, $x \neq -\dfrac{1}{2}$.

b) $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{5}} = \dfrac{\frac{7}{8}}{x}$, $x \neq 0.$

Porcentagem

A porcentagem pode ser definida como a centésima parte de uma grandeza, ou o cálculo baseado em 100 unidades. É comum as pessoas ou o próprio mercado usarem expressões de acréscimo ou redução nos preços de produtos ou serviços. Veja alguns exemplos:

- O Leite teve um aumento de 25%. Isto quer dizer que em cada R$ 100,00 houve um acréscimo de R$ 25,00.
- O cliente teve um desconto de 15% na compra de uma calça jeans. Isto quer dizer que em cada R$ 100,00 a loja deu um desconto de R$ 15,00.
- Se em uma empresa, de cada 100 funcionários, 75 são dedicados ao trabalho, podemos dizer que, dos funcionários que trabalham na empresa, 75% são dedicados.

Também observamos exemplos de porcentagem em nosso dia a dia, através de expressões como:

- Desconto de até 40% na grande liquidação de inverno.
- A inflação registrada em maio de 2008 foi de 1,23%.
- O rendimento da caderneta de poupança foi de 4,15% no trimestre.
- 25% da população da cidade B preferem o candidato A na eleição para presidente da República.

Todas estas expressões envolvem uma razão especial à qual damos o nome de porcentagem ou percentagem.

Taxa percentual

Suponhamos que um aluno tenha acertado em um exame 12 das 15 questões apresentadas. A razão entre o número de questões acertadas e o número total de questões é $\frac{12}{15}$. Sabemos que esta razão pode ser representada por uma infinidade de numerais racionais:

$$\frac{12}{15} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{20}{25} = \frac{80}{100} = \ldots$$

Quando uma razão for apresentada com o consequente (denominador) 100, no nosso exemplo $\frac{80}{100}$, ela é chamada **razão centesimal**.

Exemplo 3.9 Escreva a razão $\frac{3}{4}$ em forma de taxa percentual.

Resolução: $\frac{3}{4} = \frac{x}{100} \quad \Rightarrow \quad x = 75.$

Portanto, $\frac{3}{4}$ na forma de taxa é 75%.

Exemplo 3.10 Escreva 2,5% em forma de razão irredutível.

Resolução: $2{,}5\% = \frac{2{,}5}{100} = \frac{1}{40}.$

Portanto, 2,5% na forma de razão irredutível é $\frac{1}{40}$.

Elementos do cálculo percentual

Vimos que: $\frac{12}{15} = \frac{80}{100}$, onde ao 12 denominamos percentagem, ao 15, principal e ao 80, taxa, ou seja,

$$\frac{percentagem}{principal} = \frac{taxa}{100}.$$

Observe as seguintes definições:

Taxa é o valor que representa a quantidade de unidades tomadas em 100.

Notação: i.

Percentagem é o valor que representa a quantidade tomada de outra, proporcionalmente a uma taxa.

Notação: p.

Principal é o valor da grandeza da qual se calcula a percentagem.

Notação: P.

O principal, a percentagem e a taxa são os elementos do cálculo percentual. E, genericamente tem-se que:

$$\frac{p}{\mathrm{P}} = \frac{i}{100}.$$

Pode-se também representar a expressão acima por: $p = \frac{P \times i}{100}$.

Exemplo 3.11 Um vendedor tem 4% de comissão nos negócios que faz. Qual sua comissão numa venda de R$ 460,00?

Resolução:

1ª Resolução

$P = 460{,}00$ e $i = 4$.

Assim,

$$\frac{p}{460} = \frac{4}{100} \Rightarrow \mathrm{p} = \frac{460 \times 4}{100} = 18{,}40.$$

2ª Resolução

100% R$ 460,00

4% ↓ ↓ p

100% × p = 4% × R$ 460,00

Portanto, a comissão é de R$ 18,40.

Exemplo 3.12 Em um colégio, 28% dos alunos são meninas. Quantos alunos possui o colégio, se elas são em número de 196?

Resolução:

1ª Resolução

$P = 196$ e $i = 28$.

Assim,

$$\frac{196}{P} = \frac{28}{100} \Rightarrow P = \frac{196 \text{ x } 100}{28} = 700.$$

2ª Resolução

100% $\quad P$

28% ↓ $\quad$ ↓ 196

$$100\% \times 196 = 28\% \times P$$

$P = 700$.

Logo, o colégio possui 700 alunos.

Veja se você está acompanhando as explicações. Resolva a atividade a seguir:

Um automóvel foi adquirido por R$ 20.000,00 e vendido com um lucro de R$ 2.400,00. Qual a percentagem, de lucro?

Resposta: 12%.

Exemplo 3.13 Em um supermercado o preço da lata de azeite marca "Saúde", em determinado período de tempo, subiu de R$ 5,97 para R$ 6,25. Qual o percentual de aumento?

Resolução: Este exemplo trata de proporção, que você verifica com frequência em vários supermercados de sua cidade. Para calcular o aumento você inicialmente calcula fazendo $6{,}25 - 5{,}97 = 0{,}28$, ou seja, a lata de azeite subiu R$ 0,28, logo R$ 0,28 está para R$ 5,97 assim como x está para 100, onde x é o percentual de aumento, assim aplicando a regra de três temos:

$$\frac{0{,}28}{5{,}97} = \frac{x}{100} \Rightarrow 0{,}28\, x\, 100 = 5{,}97 \text{ x } x$$

$$\Rightarrow 28 = 5{,}97 \text{ x } x \Rightarrow x = \frac{28}{5{,}97} = 4{,}69.$$

Portanto, o percentual de aumento é de 4,69%.

Avalie seu entendimento resolvendo a atividade a seguir.

Um imóvel foi vendido por R$ 75.000,00, recebendo o intermediário 4% da comissão. Calcule a comissão.

Resposta: R$ 3.000,00.

Agora mudamos um pouco o enunciado da atividade anterior. Busque resolver esta nova situação.

Um corretor de imóveis recebe R$ 75.000,00 pela venda de duas casas, tendo sido de 4% a taxa de comissão. Qual o valor de venda das propriedades?

Resposta: R$ 1.875.000,00.

Atividades de aprendizagem

Para saber se você está entendendo, procure resolver as atividades propostas a seguir. Sempre que sentir dificuldades, retorne aos conceitos e exemplos apresentados e se necessário busque o auxílio de seu tutor. Bons estudos!

9. Em uma liquidação, uma camisa que custava R$ 46,00 foi vendida com 15% de abatimento. De quanto foi o abatimento?
10. Um corretor de imóveis recebe de comissão R$ 84.000,00 pela venda de duas casas, tendo sido de 6,5% a taxa de comissão. Qual o valor de venda das propriedades?
11. Uma pessoa devia R$ 20.000,00 e pagou R$ 3.500,00; quantos por cento da dívida foram pagos?
12. Escreva sob a forma de taxa percentual cada uma das seguintes razões:

    a) $\frac{2}{5}$.

    b) $\frac{1}{20}$.

    c) $\frac{5}{2}$.

    d) 0,24.

    e) 0,012.

13. Escreva as taxas percentuais abaixo como razões, sob a forma mais simples possível:

    a) 80%.

    b) 25,2%.

    c) 0,48%.

    d) 18,6%.

14. Por quanto devo vender um objeto que me custou R$ 15,00, para obter um lucro de 30%?

15. Uma nota promissória cujo valor era R$ 500,00 foi paga com um desconto de R$ 25,00. Qual a taxa de desconto?

16. Um jornal recebia por mês R$ 4.200,00 de anúncios. Os preços dos anúncios foram aumentados em 6%. Qual será a nova receita mensal do jornal?

17. Um imóvel foi vendido por R$ 96.000,00, recebendo o intermediário 3% de comissão. Calcule a comissão.

18. Um vendedor recebe 3% de comissão sobre as vendas que efetua. Qual a quantia a receber pelas vendas cujos valores são: R$ 800,00; R$ 375,00; e R$ 950,00?

19. Em um dos Grandes Prêmios de Fórmula 1, largaram 24 carros e terminaram a competição 10 carros. De quanto por cento foi o número de carros que não terminaram a corrida?

20. Um comerciante comprou 120 bonés a R$ 22,00 cada um. Vendeu a metade a R$ 26.40 e o restante a R$ 30,80. De quanto por cento foi o lucro?

21. O gabinete do prefeito da cidade de Feliz Espera é uma sala com 15 metros de comprimento. Este comprimento é representado num desenho por 5 cm. Qual é a escala do desenho?

22. A Secretaria de Obras da Prefeitura de Cidade Alegre planeja construir a sua própria sede e em sua maquete a altura da sede é de 80 cm. Qual a altura real da sede da secretaria de obras, sabendo-se que essa maquete foi feita utilizando a escala 1:25?
23. Num concurso público realizado pela Prefeitura Municipal de Cidade Alegre havia 90 candidatos. Tendo sido aprovados 30, determine a razão entre o número de reprovados e o número de aprovados.
24. A cantina da Secretaria de obras do município de Arara comprou um refrigerador cujo preço de pauta é R$2.500,00. Como o pagamento foi feito à vista houve um desconto de 7,5%. Calcular o valor pago após o desconto.
25. Sobre o salário de R$840,00 do servidor Arapongas da Secretaria Municipal de Finanças da cidade Radar são descontados 2% para a associação de classe. Calcular o valor do desconto.

Complementando....

Para aprofundar os conceitos estudados nesta Unidades consulte:

- *Vencendo a matemática* – de Miguel Assis Name.
- Ensino Fundamental: Aplicações das Razões e Proporções – de Desirée F. Balielo e Ulysses Sodré, disponível em: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/razoes/razoes-aplic.htm >. Acesso em: 1º jun. 2009.
- Razão, proporção e porcentagem: aplicações na farmacologia – de Vilmontes Rocha e Douglas Pires de Oliveira, disponível em: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/razoes/razoes-aplic.htm> Acesso em: 1º jun. 2009.
- Razão, proporção e porcentagem – disponível no *site* <http://www.portaltosabendo.com.br/index.php/assuntos_enem/visualizar/razao_proporcao_e_porcentagem.wsa>. Acesso em: 1º jun. 2009.
- Razão e proporção – Porcentagem – Regra de três – disponível no *site* <http://www.matematicadidatica.com.br/RazaoProporcao.aspx>. Acesso em: 1º jun. 2009.

Resumindo

Nesta Unidade você compreendeu as noções básicas de razões, proporções e porcentagem. Estes três assuntos são importantes no conhecimento básico de Matemática, principalmente o assunto de porcentagem, que é utilizado dia a dia. Também você aprendeu a aplicar este assunto na disciplina de Matemática Financeira. A partir de agora vamos estudar potenciação, radiciação e logaritmo.

Respostas das Atividades de aprendizagem

1. a) $\frac{4}{5}$. b) $\frac{1}{5}$. c) $\frac{4}{1}$.

2. a) $\frac{1}{2}$. b) $\frac{2}{5}$. c) $\frac{3}{1}$.

d) $\frac{20}{8} = \frac{5}{2}$. e) $\frac{5}{2}$. f) $\frac{20}{1}$.

3. $\frac{2}{25}$.

4. $\frac{691}{2.050}$.

5. $k = 9$.

6. $D = 300$.

7. 1.400 litros de gasolina.

8. a) $x = -\frac{19}{3}$. b) $x = \frac{7}{30}$.

9. R$ 6,90.

10. R$ 1.292.307,69.

11. 17,5%

12. a) 40%. b) 5%. c) 250%.
d) 24%. e) 1,2%.

13. a) $\frac{4}{5}$. b) $\frac{63}{250}$. c) $\frac{12}{25}$.
d) $\frac{93}{500}$. e) $\frac{200}{3}$.

14. R$ 19,50.

15. 5%.

16. R$ 4.452,00.

17. R$ 2.880,00.
18. R$ 63,75.
19. 58,33%.
20. 30%.
21. 1:300.
22. 20 metros.
23. 2:1.
24. R$ 2.312,50.
25. R$ 16,80.

UNIDADE 4

Potenciação, Radiciação e Racionalização

Objetivos específicos de aprendizagem

Ao finalizar esta Unidade você deverá ser capaz de:

- Revisar conteúdos de potenciação, radiciação, logaritmo e exponencial;
- Identificar e escrever os tipos e as propriedades de potenciação;
- Identificar e escrever as propriedades de racionalização;
- Aplicar as propriedades de logaritmo; e
- Utilizar estes conceitos em operações com potências de mesma base, por exemplo, na racionalização de radicais e operações com logaritmos.

Introdução

Na Unidade anterior você relembrou o que é razão, proporção, porcentagem, regra de três e várias regras que têm grande importância não só em Matemática como, também, na sua vida. Agora, você vai revisar o que é potenciação, radiciação e racionalização. Bons estudos!

A humanidade demorou milhares de anos para chegar da contagem simples até os cálculos de potenciação. Uma importante etapa desse percurso foi desenvolvida por Arquimedes, na Grécia antiga. Esse matemático viveu no século III a.C. e fez importantes contribuições tanto no desenvolvimento teórico, como prático da ciência.

Em suas especulações, Arquimedes resolveu calcular quantos grãos de areia eram necessários para encher o Universo. Essa questão parecia fundamental a Arquimedes. Em sua época, o Universo era considerado um sistema de esferas com o mesmo centro: o Sol. Os planetas estavam fixados na superfície de cada esfera.

A potenciação, ou potência, é uma ferramenta útil para simplificar cálculos com números grandes – foi, aliás, desenvolvida com esse intuito, como mostra a história da criação da potência. Diz-se que a potenciação facilita os cálculos matemáticos principalmente graças às propriedades que ela tem.

O objetivo é apresentar as principais técnicas utilizadas na racionalização de denominadores de frações irracionais, uma vez que não é possível estabelecer uma regra geral face à infinidade de formas que esses denominadores podem assumir.

A invenção de vários artifícios para o ensino da Aritmética deve-se ao matemático escocês John Napier, barão de Merchiston (1550-1617), que se interessou fundamentalmente pelo cálculo numérico e pela trigonometria. Em 1614, e ao fim de 20 anos de trabalho, ele publicou a obra *Logarithmorum canonis descriptio*, onde explica como se utilizam os logaritmos, mas não relata o processo como chegou a eles.

Nesta Unidade apresentaremos a potenciação e as regras de resolução de potências. Também apresentaremos a radiciação e a racionalização envolvendo frações.

Potenciação

A potenciação indica multiplicações de fatores iguais. Por exemplo, o produto $4 \cdot 4 \cdot 4$ pode ser indicado na forma 4^3. Veja mais exemplos:

- $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.
- $(-3)^2 = (-3)\ (-3) = 9$.
- $(-5)^3 = (-5)\ (-5)\ (-5) = -125$.
- $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$.

Nesta seção explicaremos os tipos de potenciação e suas propriedades. Lembramos novamente que a potenciação é uma multiplicação de fatores iguais.

Tipos de potenciação

A seguir explicaremos vários tipos de potenciação.

Potência com expoente inteiro positivo

Sejam $a \neq 0$, chamado de base, e n chamado expoente, números reais, então

$$a^1 = 1$$
$$a^2 = a \times a$$
$$\vdots$$
$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ vezes}}.$$

Exemplos:

- $4^1 = 4$.
- $3^4 = 3\times3\times3\times3 = 81$.
- $(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$.

Potência com expoente nulo

$a^0 = 1$ para qualquer $a \neq 0$.

Exemplos:

- $9^0 = 1$.
- $\left(-\frac{3}{5}\right)^0 = 1$.

Potência com expoente negativo

$$a^{-1} = \frac{1}{a},\ a \neq 0.$$
$$a^{-2} = \frac{1}{a^2},\ a \neq 0.$$
$$\vdots$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \neq 0.$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n,\ a \neq 0,\ b \neq 0.$$

Exemplos:

- $4^{-1} = \dfrac{1}{4}$.
- $(-1)^{-1} = \dfrac{1}{(-1)^1} = -1$.
- $(-2)^{-2} = \dfrac{1}{(-2)^2} = \dfrac{1}{4}$.

Vamos ver se você entendeu? Separamos para você simplificar as seguintes expressões. Mas, lembre-se: não hesite em perguntar em caso de dúvida.

a) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$.

b) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$.

c) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{-2}$.

Resposta:

a) 4.

b) $-\dfrac{27}{8}$.

c) $\dfrac{25}{16}$.

Potência com expoente fracionário

Podemos também aplicar as regras de potenciação, quando a potência é fracionária. Toda potência com expoente fracionário pode ser escrita em forma de radical e todo radical pode ser escrito na forma de potenciação com expoente fracionário. Por exemplo,

- $3^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3}$.
- $5^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{5^4}$.
- $\sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{2}{2}} = 5$.
- $\sqrt[3]{(27)^2} = \left((27)^2\right)^{\frac{1}{3}} = (27)^{\frac{2 \cdot 1}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$.

Propriedades de potenciação

A seguir você irá revisar algumas propriedades importantes de potenciação. Estas propriedades serão utilizadas frequentemente em cálculos matemáticos.

P1. Produto de potências de mesma base

Considere o exemplo $4^2 \times 4^6$. Por definição de potência você tem:

$$4^2 \times 4^6 = (4 \times 4) \times (4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4) = 4^8.$$

Agora, sejam $a \neq 0$ e m e n números reais, então $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

Exemplos:

- $(-5)^3 \times (-5)^4 = (-5)^{3+4} = (-5)^7$.
- $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$.
- $4^2 \times 4^6 = 4^{2+6} = 4^8$.
- $a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{2+\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{2}}$.
- $3^2 \times 3^4 \times 3^3 = 3^{2+4+3} = 3^9$.

P2. Divisão de potência de mesma base

Considere o exemplo $\frac{3^5}{3^3}$. Pela definição de potência você tem:

$$\frac{3^5}{3^3} = \frac{\cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 3 \times 3}{\cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3}} = \frac{3 \times 3}{1} = \frac{3^2}{1} = 3^2 = 9.$$

Sejam $a \neq 0$ e m e n números reais, então $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Exemplo:

- $\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3} = 3^2 = 9.$
- $\frac{b^{-\frac{2}{5}}}{b^{-\frac{4}{5}}} = b^{-\frac{2}{5}+\frac{4}{5}} = b^{\frac{2}{5}}.$
- $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}.$

Para verificar se você está acompanhando os estudos propostos até o momento nesta Unidade, separamos algumas expressões que precisam ser simplificadas.

a) $\frac{7^6}{7^4}$.

b) $\frac{6^{-\frac{1}{2}}}{6^{\frac{1}{2}}}$.

Resposta:

a) 49

b) 1

P3. Potência de uma fração

Seja o seguinte exemplo $\left(\frac{2}{3}\right)^3$. Pela definição de potência temos:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}.$$

Sejam $b \neq 0$ e n números reais então $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Exemplos:

- $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}.$
- $\left(\frac{5}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{7^2}{5^2} = \frac{49}{25}.$
- $\left(\frac{2x}{3}\right)^2 = \frac{(2x)^2}{3^2} = \frac{2^2\,x^2}{3^2} = \frac{4x^2}{9}.$
- $3^{\frac{1}{2}} . 3^{\frac{1}{2}} = 3^1 = 3$

Vamos ver se você entendeu? Reservamos para você algumas frações que precisam ser simplificadas:

a) $\left(\frac{4}{3}\right)^3.$

b) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}.$

c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}.$

Resposta:

a) $\frac{64}{27}.$

b) $\frac{9}{16}$.

c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}}$.

P4. Potência de potência

Considere o seguinte exemplo $(5^3)^2$. Pela definição de potência você tem:

$(5^3)^2 = 5^3 \times 5^3 = (5\times5\times5) \times (5\times5\times5) = 5^6 = 15.625$.

Sejam $a \neq 0$ e m e n números reais, então $(a^m)^n = a^{m\times n}$.

Exemplos:

- $(5^3)^2 = 5^{3\times2} = 5^6 = 15.625$.
- $(3^2)^4 = 3^{2\times4} = 3^8$.
- $\left(\left(\frac{3}{5}\right)^3\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{3\times\frac{2}{3}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{6}{3}} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$.

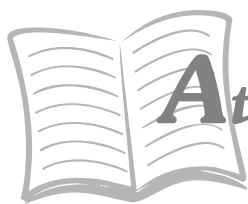
Você sabe agora como calcular a potência de outra potência? De acordo com esta propriedade, resolva as duas alternativas a seguir:

a) $\left(\left(\frac{5}{3}\right)^3\right)^{-\frac{1}{2}}$.

b) $(4^2)^{\frac{3}{4}}$.

Resposta:

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$.

b) $4^{\frac{3}{2}}$.

Até o momento revisamos potenciação e suas propriedades. Vamos verificar se você compreendeu as definições apresentadas? Então resolva os exercícios propostos a seguir.

1. Resolva as expressões abaixo:

   a) $3^4 \cdot 3^{-2}$.

   b) $2^3 \cdot 2^4$.

   c) $10^{-1} \cdot 10^5$.

   d) $\left(-\frac{9}{4}\right)^{-2}$.

   e) $(5^{-3})^6$.

   f) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^{3}$.

   g) $\left(\left(\frac{4x}{5}\right)^{2}\right)^{3}$.

   h) $\left(-\frac{4x}{5}\right)^{-3}$.

2. Se $a = 3^{-5}$, $b = 3^{-3}$ e $c = 3^{-7}$. Calcule o valor de:

   a) $\frac{3ab}{c}$.

   b) $\frac{a^{-2}\,c^{-2}}{b^2}$.

   c) $\frac{ab^2}{3c}$.

Radiciação

O termo radiciação pode ser entendido como uma operação que tem por finalidade, se fornecida uma potência de um número e o seu grau, determinar esse número. Por exemplo, suponha que tenhamos um determinado número elevado à sexta potência. Numa operação de extração de raiz de índice 6, teremos como resultado o número a, ou seja, $\sqrt[6]{a^6} = (a^6)^{\frac{1}{6}} = a$.

Exemplo 4.1 Determine a raiz cúbica do número 27.

Resolução: Primeiramente devemos nos perguntar qual o número que multiplicado por ele mesmo três vezes resulta o número 27, ou seja, determinar qual o número que elevado na potência 3 resulta o número 27?

Agora ficou fácil não é? O número é o 3, pois $3^3 = 27$.

Vamos conhecer mais alguns exemplos:

- $\sqrt[3]{125}$ é 5, pois $5^3 = 125$;
- $\sqrt[4]{16}$ é 2, pois $2^4 = 16$;
- $\sqrt[4]{16}$ é –2, pois $(-2)^4 = 16$;
- $\sqrt[3]{-27}$ é –3, pois $(-3)^3 = 16$;
- $\sqrt{-25}$ não existe em $\mathbb{R}$.

Com base nesta exemplificação podemos identificar que um número b é chamado de raiz enésima de um número a, isto é, $\sqrt[n]{a} = b$ se, e somente se, $a = b^n$, onde

$\sqrt{\ }$ é o radical,

a é o radicando,

b é a raiz,

n é o índice do radical, ou

Exemplos:

- $\sqrt[3]{64} = 4$, pois $4^3 = 64$.
- $\sqrt[5]{\left(\frac{32}{243}\right)} = \frac{2}{3}$, pois $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$.
- $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2$.

Como está seu entendimento sobre radiciação? Procure resolver as questões propostas na sequência.

a) $\sqrt[3]{-8}$.

b) $\sqrt[5]{32}$.

Resposta:

a) –2

b) 2

Racionalização

Esta técnica consiste em multiplicar a fração dada por um número que não altere o seu valor (apenas a sua apresentação).

Vamos pensar juntos? Qual número pode ser multiplicado por qualquer outro sem alterar seu valor? Isso mesmo, 1 (um).

Ou seja, qualquer número multiplicado por 1 continua com o mesmo valor, por exemplo $3 \cdot 1 = 3$, $\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$. Também sabemos que toda fração cujos numeradores e denominadores são iguais, podemos pensar em um número inteiro para representá-la vale 1, ou seja, $\frac{5}{5} = 1$, $\frac{15}{15} = 1$, $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = 1$.

Agora sim vamos ver racionalização de frações. Você está pronto? Podemos começar?

Em alguns cálculos algébricos, você pode se deparar com raízes no denominador da fração. Para que possa prosseguir com os cálculos, é conveniente que você elimine essas raízes do denominador – processo chamado de racionalização de denominadores. Isto é, transforma-se um denominador irracional em racional.

Racionalizar uma fração cujo numerador ou denominador contém um radical é encontrar outra fração equivalente à fração dada cujo numerador ou denominador não contenha mais o radical. O mais comum é racionalizar o denominador, que significa eliminar todos os radicais que existem no denominador da fração, sem alterar o seu valor.

Você lembra de produto notável, $(x+y)\times(x-y) = x^2-y^2$, assunto estudado na Unidade 2. Dizemos que $x+y$ é conjugado de $x-y$ porque $(x+y)\times(x-y) = x^2-y^2$. Assim:

i) chama-se conjugado da soma $(x+y)$ a diferença $(x-y)$; e

ii) chama-se conjugado da diferença $(x-y)$ a soma $(x+y)$.

Veja agora alguns exemplos de racionalização.

Exemplos 4.2 Racionalize as frações:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Resolução: Multiplicando-se ambos os termos da fração $\frac{1}{\sqrt{3}}$ por $\sqrt{3}$ e simplificando, você tem

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ x} 1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ x } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Portanto, racionalizando $\frac{1}{\sqrt{3}}$ você obtém $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) $\frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$.

Resolução: Multiplicando-se ambos os termos da fração pelo conjugado do denominador, aqui o conjugado de $\sqrt{7}+\sqrt{3}$ é $\sqrt{7}-\sqrt{3}$, você tem:

$$\frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{5\,(\sqrt{7}-\sqrt{3}\,)}{(\sqrt{7}+\sqrt{3}\,) \times (\sqrt{7}-\sqrt{3}\,)}$$

$$= \frac{5\,(\sqrt{7}-\sqrt{3}\,)}{(\sqrt{7}\,)^2-(\sqrt{3}\,)^2} = \frac{5\,(\sqrt{7}-\sqrt{3}\,)}{\sqrt{7^2}-\sqrt{3^2}}$$

$$= \frac{5\,(\sqrt{7}-\sqrt{3}\,)}{7-3} = \frac{5\,(\sqrt{7}-\sqrt{3}\,)}{4}.$$

Portanto, racionalizando $\frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$, temos $\frac{5\,(\sqrt{7}-\sqrt{3}\,)}{4}$.

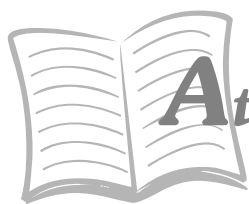
Vamos ver se você entendeu? Separamos para você racionalizar as seguintes expressões:

a) $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$.

b) $\frac{8}{3\sqrt{2}}$.

Resposta:

a) $\frac{\sqrt{x-2}}{x-2}$.

b) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Hora de testar seus conhecimentos. Você está pronto? Responda, então, às atividades propostas!

3. Calcule o valor das expressões abaixo:

   a) $\sqrt{25}$.

   b) $\sqrt{16^{-2}}$.

   c) $\sqrt[4]{\sqrt{625}}$.

   d) $\sqrt[3]{\left(-\frac{3}{4}\right)^6}$.

   e) $\sqrt[3]{\left(\frac{-27}{100}\right)}$.

   f) $\sqrt{\left(\frac{49x^2}{81}\right)}$.

   g) $\sqrt[3]{\left(\frac{5x}{6y}\right)^6}$.

4. Calcule o valor de:

   a) $a = \dfrac{2\sqrt{12} + 2\sqrt{75}}{\sqrt{48}}$.

   b) x em $\dfrac{x}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{12}}{3}$.

5. Racionalize as expressões abaixo:

   a) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

   b) $\dfrac{a}{\sqrt{a} + 1}$.

   c) $\dfrac{x + 1}{\sqrt{x - 1}}$.

Logaritmo e exponencial

Nesta seção você será levado a revisar o conteúdo de logaritmo e equações exponenciais, apresentado a você no ensino médio. Vamos começar?

Sejam a e b números reais positivos, $a \neq 1$. O logaritmo de b na base a, escreve-se $\log_a b$, é igual a x, dado por

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b,\ a>0,\ b>0,\ a \neq 1\ \forall x \in \mathbb{R},$$

onde a é base, b é anti-logaritmo e x é logaritmo, ou seja, dizemos que x é logaritmo de b na base a. a^x é considerado como a exponencial x. Quando a base é $a = 10$, você tem o logaritmo decimal cuja notação é $\log_{10} b$ ou simplesmente $\log b$.

Como consequência desta definição temos as seguintes propriedades:

P1. $\log_a a = 1$, pois pela definição de logaritmo vem $\log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$.

P2. $\log_a 1 = 0$, pois pela definição de logaritmo vem $\log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$.

Conheça alguns exemplos de resolução de logaritmo:

- $\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$.
- $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$, pois $25^{\frac{1}{2}} = 5$.
- $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, pois $3^{-2} = \frac{1}{9}$.
- $\log_{10}(1.000) = 3$ ou $\log(1.000) = 3$, pois $10^3 = 1.000$.

- $\log_5 5 = 1$, pois $5^1 = 5$.
- $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$, pois $\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$.
- $\log_4 1 = 0$, pois $4^0 = 1$.
- $\log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$, pois $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$.

Propriedades

Sejam a, b, $c \in \mathbb{R}^*_+$, onde $\mathbb{R}^*_+ = \mathbb{R}_+ - \{0\}$ com $a \neq 1$. Então valem as seguintes propriedades:

Logaritmo de produto

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y.$$

Exemplos:

- $\log_2 (32 \times 64) = \log_2 32 + \log_2 64 = 5 + 6 = 11$.
- $\log 20 + \log \frac{1}{2} = \log \left(20 \times \frac{1}{2}\right) = \log 10 = 1$.

Logaritmo de quociente

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$$

Exemplos:

- $\log_5 \left(\frac{50}{2}\right) = \log_5 50 - \log_5 2$.
- $\log_3 405 - \log_3 5 = \log_3 \left(\frac{405}{5}\right) = \log_3 81 = 4$.

Logaritmo de uma potência

$$\log_a b^x = x\log_a b,\ x \in \mathbb{R}.$$

Exemplos:

- $\log \sqrt{7} = \log 7^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ x $\log 7$.
- $\log_5 4^3 = 3 \times \log_5 4$.
- $\log_5 5^4 = 4 \log_5 5 = 4 \cdot 1 = 4$, pois $\log_5 5$.
- $\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 5 \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right) = 5 \cdot 1 = 5$, pois $\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right) = 1$.

Logaritmo natural

Você sabe que $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, $a>0$, $b>0$, $a \neq 1$. Se a base for $a = e$ (número irracional $e \cong 2{,}718281828...$), vem:

$$\log_e b = 1\text{n } b = x \Leftrightarrow e^x = b.$$

Assim, $1\text{n } b = \log_e b$, $b>0$, $a = e$ é chamado de número de Neper e $\log_e b = 1\text{n } b$ de logaritmo neperiano ou logaritmo natural. É comum indicá-lo por $1\text{n } x$.

A seguir acompanhe os exemplos resolvidos.

Exemplos 4.3 Calcule os logaritmos a seguir:

a) $\log_2 \sqrt{16}$.

Resolução: $\log_2 \sqrt{16} = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2\log_2 2 = 2$.

b) $\log_{\frac{1}{16}} 2$.

Resolução:

$$\log_{\frac{1}{16}} 2 = -\frac{1}{4} \log_{\frac{1}{16}} 2^{-4} = -\frac{1}{4} \log_{\frac{1}{16}} \left(\frac{1}{16}\right) = -\frac{1}{4} \cdot 1 = -\frac{1}{4}.$$

ou

$$\log_{\frac{1}{16}} 2 = x$$

$$\left(\frac{1}{16}\right)^x = 2$$

$$2^{-4x} = 2^1$$

$$-4x = 1$$

$$x = -\frac{1}{4}$$

Alternativamente, fazendo $x = \log_{\frac{1}{16}} 2$, temos:

$$\left(\frac{1}{16}\right)^x = 2 \Rightarrow \left(\frac{1^4}{2^4}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{4x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Rightarrow 4x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}.$$

Antes de prosseguirmos, precisamos saber se você está entendendo. Para tanto resolva a alternativa a seguir:

a) $16^{x-1} = \frac{1}{32}$.

Resposta: $x = -\frac{1}{4}$

Exemplo 4.4 Se log $(x + y) = 15$ e log $(x - y) = 8$, calcule o valor de log $(x^2 - y^2)$.

Resolução: Aprendemos no item produtos notáveis, Unidade 2, que $(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)$, lembra?

Logo, $\log(x^2 - y^2) = \log(x + y)(x - y)$.

Agora, aplicando a propriedade $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, temos $\log(x^2 - y^2) = \log(x + y)(x - y) = \log(x+y) + \log(x - y) = 15 + 8 = 23$.

Portanto, $\log(x^2 - y^2) = 23$.

Vamos ver se você entendeu?

Considerando $\log(x+y)=15$ e $\log(x-y)=8$, resolva as alternativas a seguir:

a) $\log\dfrac{1}{(x+y)^2}$.

b) $\log\dfrac{1}{(x^2+y^2)^3}$.

Resposta:

a) –30.

b) –69.

Exemplo 4.5 Se $\log(x+y)=15$ e $\log(x-y)=8$, calcule o valor de $\dfrac{1}{30}\cdot\log(x+y)+\dfrac{1}{8}\cdot\log(x-y)$.

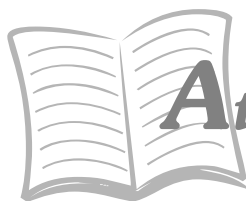
Resolução: Você tem $\dfrac{1}{30}\cdot\log(x+y)+\dfrac{1}{8}\cdot\log(x-y)=$

$$=\frac{1}{30}\cdot 15+\frac{1}{8}\cdot 8=\frac{15}{30}+\frac{8}{8}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}.$$

Portanto, $\dfrac{1}{30}\cdot\log(x+y)+\dfrac{1}{8}\cdot\log(x-y)=\dfrac{3}{2}$.

Saiba mais — **Tabelas de logaritmos**

Antes do advento do computador e da calculadora, usar logaritmos significava usar tabelas de logaritmos, que tinham de ser criadas manualmente.

Essas tabelas deram origem às famosas réguas de cálculo que eram usadas por engenheiros, físicos e economistas até o início da década de 70, quando a popularização dos computadores e das máquinas de calcular tornou completamente obsoletas as réguas de cálculo bem como as tabelas de logaritmos. Hoje em dia, os logaritmos não são mais utilizados, explicitamente, para cálculos corriqueiros e não têm mais sentido aprender ou ensinar o uso das tais tábuas.

Até aqui ficou claro? Para certificar-se de que você aprendeu, resolva as atividades propostas.

6. Efetue as operações abaixo:

   a) $\log_5\left(\frac{22}{3}\right) + \log_5\left(\frac{3}{5}\right) - \log_5\left(\frac{4}{5}\right)$.

   b) $2 \log a - 3 \log b - 2 \log c + \frac{1}{3} \log d$.

7. Se $\log_3 a - \log_3 b = 3$, calcule $\frac{a}{b}$.

8. Se $\log_2 a = 2$, $\log_2 b = 5$ e $\log_2 c = 3$, calcule o valor de $\log_2\left(\frac{\sqrt{ab}}{c^2}\right)$.

9. Se log 2 = 0,3010 e log 3 = 0,4771, $\log a = \log_{10} a$, calcule o valor de:

   a) log12.

   b) $\log\sqrt{32}$.

   c) $\log\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$.

   d) $10^x = 5$.

   e) $10^x = \frac{1}{4}$.

   f) $2^x = 100$.

Complementando...

Para aprofundar os conceitos estudados nesta Unidade consulte:

- Matemática – de Manoel J. Bezerra.
- Vencendo a matemática – de Miguel Assis Name.
- Potenciação: definição e exemplos. Disponível em: <http://www.alunosonline.com.br/matematica/potenciacao/>. Acesso em: 1º jun. 2009.
- Portal Só Matemática – para conhecer mais sobre radiciação acesse <http://www.somatematica.com.br/fundam/radiciacao.php>. Acesso em: 1º jun. 2009.
- Funções Logarítmicas e Exponencial – disponível em: <http://www.somatematica.com.br/superior/logexp/logexp5.php>. Acesso em: 1º jun. 2009.

Resumindo

Nesta Unidade você compreendeu a utilização das propriedades de potenciação. Também aprendeu racionalização de frações e, finalmente, utilizou as propriedades de logaritmo. Vamos estudar na Unidade seguinte equações do primeiro e segundo grau e também inequações (ou desigualdades) do primeiro grau.

Respostas das Atividades de aprendizagem

1. a) 9. b) 128. c) 10.000.

   d) $\frac{16}{81}$. e) $\frac{1}{5^{18}}$. f) 1.

   g) $\frac{4.096 \,.\, x^6}{15.625}$. h) $-\frac{125}{64\,x^3}$.

2. a) 1. b) 3^{30}. c) $\frac{1}{243}$.

3. a) 5. b) $\frac{1}{16}$. c) $\sqrt{5}$.

   d) $\frac{9}{16}$. e) $\frac{-3.\sqrt[3]{10}}{10}$. f) $\frac{7x}{9}$.

   g) $\frac{25x^2}{36y^2}$.

4. a) $a = \frac{7}{2}$. b) $x = 2$.

5. a) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. b) $\frac{a(\sqrt{a}-1)}{a-1}$. c) $\frac{(x+1)(\sqrt{x}-1)}{x-1}$.

6. a) $\log_5\left(\frac{11}{2}\right)$. b) $\log\frac{a^2.\sqrt[3]{d}}{b^3.\,c^2}$.

7. 27.

8. $-\frac{5}{2}$.

9. a) 1,0791. b) 0,7525. c) 0,15903.

   d) 0,699. e) –0,6020. f) 6,64452.

UNIDADE 5

Equações de 1º e 2º Graus, Inequações de 1º Grau

Objetivos específicos de aprendizagem

Ao finalizar esta Unidade você deverá ser capaz de:

- Revisar o conceito de equação de primeiro e de segundo grau de uma variável;
- Resolver exercícios de inequação de primeiro grau usando suas propriedades; e
- Resolver exercícios de equação de segundo grau aplicando a regra de Bhaskara.

Equações do 1º grau com uma variável

Prezado estudante!

Como você já sabe, nosso objetivo nesta Unidade é levar você a revisar conceitos relacionados às equações de primeiro e de segundo grau de uma variável, relembrar assuntos relacionados à inequação de primeiro grau, além de auxiliá-lo na resolução de equações de segundo grau que necessitem da regra de Bhaskara. Não se assuste! Vamos dar um passo de cada vez, de maneira que você possa acompanhar a caminhada. Para tanto, é muito importante que você se dedique ao estudo da Unidade, aproveitando-se do momento que é fundamental para sua formação pessoal e profissional. Bons estudos!

Estas equações e inequações são importantes em resolução de algumas situações práticas. Enquanto as resoluções de equações de 1º grau sempre são os pontos fixos e as inequações de 1º grau sempre são os intervalos na reta real, as equações do segundo grau (às vezes chamamos de polinômios de segunda ordem) sempre são soluções com dois valores fixos. Vamos entender melhor esta explicação nas próximas páginas.

Para resolvermos um problema matemático, quase sempre devemos transformar uma sentença apresentada com palavras em uma sentença escrita em linguagem matemática. Esta é a parte mais importante e talvez seja a mais difícil da Matemática. Veja o exemplo a seguir:

Sentença com palavras	Sentença matemática
8 barras de chocolates marca AAA + 6Kg =14Kg	$8x + 6 = 14$

Normalmente, na sentença matemática, aparecem letras conhecidas como variáveis ou incógnitas. A partir daqui, a Matemática se posiciona perante diferentes situações e será necessário conhecer o valor de algo desconhecido; este é o objetivo do estudo de equações. Por exemplo, adotando a demostração anterior você pode calcular quanto pesa cada barra de chocolate marca AAA?

A palavra *incógnita* significa *desconhecida* e equação tem o prefixo *equa* que provém do Latim e significa *igual*.

Você sabe como fazer este cálculo? Vamos lá?

Bem, se você tem 8 *barras de chocolate marca AAA* + 6*Kg* = 14*Kg*, basta usar uma letra qualquer, por exemplo, x, para simbolizar o peso de cada barra de chocolate. Assim, a equação poderá ser escrita, do ponto de vista matemático, como sendo:

$$8x + 6 = 14$$

Portanto, $x = 1$ o que nos permite afirmar que cada barra de chocolate tem 1kg.

Observe que este é um exemplo simples de uma equação contendo uma variável, mas que é extremamente útil e aparece em muitas situações reais. Valorize este exemplo simples!

Antes de prosseguirmos é importante observar que todas as equações têm:

- Uma ou mais letras indicando valores desconhecidos, que são denominadas variáveis ou incógnitas;
- Um sinal de igualdade, denotado por =;
- Uma expressão à esquerda da igualdade, denominada primeiro membro ou membro da esquerda; e

- Uma expressão à direita da igualdade, denominada segundo membro ou membro da direita.

Portanto,

$8x + 6$	=	14
1º membro	Sinal de igualdade	2º membro

Observe que neste exemplo a letra *x* é a incógnita da equação e as expressões do primeiro e segundo membro da equação são os *termos* da equação. Para resolver essa equação e encontrar o valor de x podemos utilizar o seguinte processo para obter o valor de *x*.

$8x+6 = 14$ → equação original

$8x+6 - 6 = 14 - 6$ → subtraímos 6 dos dois membros

$8x = 8$ → dividimos por 8 os dois membros da equação

$x = 1$ → solução.

Atenção! Quando adicionamos (ou subtraímos) valores iguais em ambos os membros da equação, ela permanece em equilíbrio. Da mesma forma, se multiplicamos ou dividimos ambos os membros da equação por um valor não nulo, a equação permanece em equilíbrio. Este processo nos permite resolver uma equação, ou seja, permite obter as raízes da equação.

A resolução de equações e inequações pertence a uma parte da Matemática chamada Álgebra. Essas equações surgem no nosso cotidiano, nas atividades científicas e na resolução de problemas.

Os procedimentos de resolução de equações e de sistemas de equações foram descobertos por matemáticos que se ocuparam

deste tema durante muitos anos e em diferentes épocas da história da Matemática

Aqui, vamos descrever as equações do 1º e 2º segundo grau e as inequações de 1º grau com seus métodos de resoluções. Estas últimas aparecem no contexto da vida cotidiana para comparar ofertas, pressupostos etc.

Para você o que é uma equação?

Muito bem equação é toda sentença matemática aberta que exprime uma relação de igualdade. Assim podemos dizer que a equação envolve um sinal de igualdade e uma variável. Por exemplo,

- $2x+8 = 0$;
- $5x - 6 = 6x+8$;
- $5x - 3x = -6+18$.

Em função de nossos objetivos, podemos distinguir três tipos de equações: equações de definição, equações de comportamento e equações de condições de equilíbrio.

- **Equação de definição**: estabelece uma identidade entre duas expressões alternativas que possuem exatamente o mesmo significado. Por exemplo, o lucro total (LT) é definido como sendo o excesso da receita total (RT) sobre o custo total (CT) e podemos escrever:

$$LT = RT - CT.$$

- **Equação de comportamento**: especifica a maneira pela qual uma variável se comporta em resposta a mudanças em outras variáveis. Isto pode envolver comportamento humano (o padrão de consumo em relação à renda), aspectos tecnológicos (a função de produção) e legais (carga tributária). Por exemplo, seja o custo total dado por $CT = 200 + 10x$, onde x denota

a quantidade de determinado produto. O custo fixo (o valor de CT quando $x = 0$) é 200. À medida que x aumenta, CT aumenta.

- **Equação de condições de equilíbrio**: temos quando um modelo matemático econômico envolve a noção de equilíbrio. Duas das mais frequentes condições de equilíbrio em Economia são:

  $Q_p = Q_o$ (quantidade procurada = quantidade ofertada).

  $S = I$ (poupança planejada = investimento planejado).

Resolução de uma equação

Resolver uma equação ou problema por ela proposto significa determinar o seu conjunto solução (S), dentro do conjunto universo (U) considerado que torna a equação verdadeira. As equações de 1° grau são do tipo $ax + b = 0$. Para resolvê-las, normalmente isolamos a variável no lado esquerdo da expressão.

Exemplos 5. 1 Resolver as seguintes equações em $\mathbb{R}$:

- $2x + 3 = –5$.

Resolução: Para resolver $2x + 3 = –5$, você adiciona –3 a ambos os membros desta equação obtendo uma equação equivalente, assim

$2x + 3 = –5 \Rightarrow 2x + 3 – 3 = – 5 – 3$

$\Rightarrow 2x + 0 = – 8$ (pois zero é o elemento neutro da adição)

$\Rightarrow 2x = – 8$.

Agora, você multiplica ambos os membros de $2x = – 8$ por $\frac{1}{2}$ e tem:

$2x = -8 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 2x = \frac{1}{2} \times -8$

$\Rightarrow \frac{2}{2}x = \frac{-8}{2} = -4$, pois 1 *é* o elemento neutro da multiplicação.

$\Rightarrow 1 \cdot x = -4 \Rightarrow x = -4.$

Omitindo algumas etapas realizadas acima, após compreendê-las, para resolver a equação $2x + 3 = -5$, você isola a variável x no lado esquerdo de $2x + 3 = -5$, vem $2x + 3 = -5 \Rightarrow 2x = -5 - 3$

$\Rightarrow 2x = -8 \Rightarrow x = \frac{-8}{2} = -4.$

Portanto, $S = \{-4\}$.

▶ $5x = 30.$

$5x = 30 \Rightarrow x = \frac{30}{5} = 6.$

Portanto, $S = \{6\}$.

▶ $-3x + 5x = -2.$

$-3x + 5x = -2 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{2} = -1.$

Portanto, $S = \{-1\}$.

▶ $-3(-5 + x) - x = -7x + 1.$

$-3(-5 + x) - x = -7x + 1.$

$\Rightarrow 15 - 3x - x = -7x + 1$

$\Rightarrow 7x - 4x = -15 + 1 = -14$

$\Rightarrow 3x = -14 \Rightarrow x = \frac{-14}{3} = -\frac{14}{3}.$

Portanto, $S = \left\{-\frac{14}{3}\right\}.$

Exemplos 5.2 Determine o conjunto solução das seguintes equações:

▶ $\dfrac{y}{6} = \dfrac{-8}{3}$.

Resolução: $\dfrac{y}{6} = \dfrac{-8}{3} \Rightarrow y = \dfrac{(-8)\,6}{3} = \dfrac{-48}{3} = -16.$

Portanto, $S = \{-16\}$.

▶ $\dfrac{3x}{2} + \dfrac{x+3}{4} = 2x - \dfrac{6-x}{6} + \dfrac{1}{2}$.

Resolução: $\dfrac{3x}{2} + \dfrac{x+3}{4} = 2x - \dfrac{6-x}{6} + \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{2(3x) + x + 3}{4} = \frac{12x - (6 - x) + 3}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{6x + x + 3}{4} = \frac{12x - 6 + x + 3}{6} \Rightarrow \frac{7x + 3}{4} = \frac{13x - 3}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{7x + 3}{2} = \frac{13x - 3}{3} \Rightarrow 3(7x + 3) = 2(13x - 3)$$

$$\Rightarrow 21x + 9 = 26x - 6 \Rightarrow 21x - 26x = -6 - 9$$

$$\Rightarrow -5x = -15 \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{5} = 3$$

Portanto, $S = \{3\}$.

Para verificar se você entendeu, reservamos algumas equações para você resolver:

a) $\dfrac{3z}{4} = \dfrac{-1}{3}$.

Resposta: $S = \left\{-\dfrac{4}{9}\right\}$.

b) $\frac{2x-3}{2}+\frac{-x+1}{5}=\frac{-x+5}{10}$.

Resposta: $S = \{2\}$.

Agora que você já sabe tudo sobre equação de 1º grau vamos ver alguns exemplos práticos?

Exemplo 5.3 O lucro mensal (L) da empresa Falida é dado por $L = 30x - 4.000,00$, onde x é a quantidade mensal vendida de seu produto. Qual a quantidade que deve ser vendida mensalmente para que o lucro da empresa Falida seja igual a R$ 11.000,00?

Resolução: Sendo $L = 30x - 4.000,00$ a equação do lucro mensal da empresa Falida e como ela pretende ter um lucro mensal de R$ 11.000,00, você tem a seguinte equação:

$$30x - 4.000,00 = 11.000,00$$

e resolvendo,

$30x - 4.000,00 = 11.000,00$

$\Rightarrow 30x = 11.000,00 + 4.000,00 = 15.000,00$

$\Rightarrow 30x = 15.000,00$

$\Rightarrow x = \frac{15.000,00}{30} = 500.$

Portanto, a quantidade que deve ser vendida mensalmente para que o lucro seja R$ 11.000,00 é 500 itens de seu produto.

Exemplo 5.4 O custo mensal (C) de produção de x, $x \in \mathbb{R}$, computadores marca AAA de uma fábrica é $C = 800 + 25x$. Determinar a quantidade mensal produzida sabendo-se que o custo mensal é R$ 15.000,00.

Resolução: Você tem o custo mensal de produção que é $C = 800 + 25x$. E como a fábrica deseja calcular a quantidade mensal produzida para um custo mensal de R$ 15.000,00, tem-se a seguinte equação.

$$800 + 25x = 15.000$$

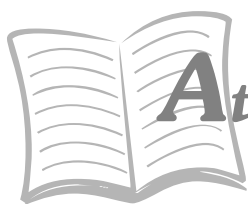
e resolvendo temos:

$800 + 25x = 15.000$

$\Rightarrow 25x = 15.000 - 800 = 14.200$

$\Rightarrow 25x = 14.200$

$\Rightarrow x = \dfrac{14.200}{25} = 568.$

Portanto, a quantidade mensal produzida de computadores marca AAA é 568.

Agora que revisamos o conceito de equação de primeiro grau procure resolver as atividades a seguir.

1. Resolver as seguintes equações de 1º grau em R:

   a) $3z + 1 = 7z - 3$.

   b) $\frac{5}{2x} = \frac{15}{12}$.

   c) $\frac{3}{y-2} = \frac{6}{4}$.

2. Resolver as seguintes equações de 1º grau em R:

   a) $\frac{x-6}{3} = 5x - 7$.

   b) $\frac{2x+1}{3} + \frac{x-3}{2} = \frac{x-4}{6}$

   c) $\frac{3x-2}{4} + \frac{x-3}{2} - 3 = 5x - \frac{2-4x}{6} + \frac{1}{2}x$.

3. A demanda de certo produto pelo consumidor é de $D(p) = -200p + 12.000$ unidades por mês, onde p é o preço de mercado, em reais, por unidade. Determine o preço de mercado por unidade quando a demanda é de 8.000 unidades por mês.

Equações do 2° Grau ou Equações Quadráticas

As equações do segundo grau são abordadas na história da Matemática desde a época dos egípcios, babilônios, gregos, hindus e chineses.

O primeiro registro das equações polinomiais do 2º grau foi feita pelos babilônios. Eles tinham uma álgebra bem desenvolvida e resolviam equações de segundo grau por métodos semelhantes aos atuais ou pelo método de completar quadrados. Como as resoluções dos problemas eram interpretadas geometricamente, não fazia sentido falar em raízes negativas. O estudo de raízes negativas foi feito a partir do Século XVIII.

Na Grécia, a Matemática tinha um cunho filosófico e pouco prático. Euclides, nos *Elementos*, resolve equações polinomiais do 2º grau através de métodos geométricos. Buscando contribuir na busca da resolução de equações do 2º grau Diophanto apresentou outra representação da equação introduzindo alguns símbolos, pois até então a equação e sua solução eram representados em forma discursiva.

Na Índia as equações polinomiais do 2º grau eram resolvidas completando quadrados. Esta forma de resolução foi apresentada geometricamente por Al-Khowârizmi, no século IX. Eles descartavam as raízes negativas, por serem "inadequadas" e aceitavam as raízes irracionais. Tinham também uma "receita" para a solução das equações de forma puramente algébrica.

No Brasil, costuma-se chamar de fórmula de Bhaskara àquela que dá as soluções da equação do segundo grau. São

equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$. Suas soluções são dadas por

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},\ a \neq 0.$$

Para resolvermos uma equação do segundo grau devemos lembrar:

i) Δ, lê-se delta, do alfabeto grego e $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado descriminante da equação $ax^2 + bx + c = 0$,

ii) Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui soluções reais e distintas;

iii) Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui soluções reais e iguais;

iv) Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não possui soluções reais.

Atenção! Se $a = 0$ em $ax^2 + bx + c = 0$, vem $0x^2 + bx + c = 0$ ou $0 + bx + c = 0$, ainda $bx + c = 0$ e você tem uma equação do primeiro grau em x. Se $b = 0$ ou $c = 0$, a equação está na forma incompleta.

Exemplos 5.5 Resolver as equações em $\mathbb{R}$.

▶ $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Resolução: Na equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, você tem $a = 1$; $b = -5$ e $c = 6$. Aplicando a fórmula acima, você tem:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.6}}{2.1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

ou seja,

$x_1 = \dfrac{5-1}{2} = 2$ ou $x_2 = \dfrac{5+1}{2} = 3$ são as soluções da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Portanto, $S = \{2, 3\}$.

▶ $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Resolução: Na equação $x^2 - 4x + 3 = 0$, você tem, $a = 1$; $b = -4$ e $c = 3$. Aplicando a fórmula acima, teremos:

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.3}}{2.1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

ou seja,

$x_1 = \frac{4-2}{2} = 1$ ou $x_2 = \frac{4+2}{2} = 3$ são as soluções da equação $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Portanto, $S = \{1, 3\}$.

Para verificarmos se você entendeu, separamos algumas equações para você resolver:

$-x^2 + 6x - 9 = 0$.

Resposta: $S = \{3\}$.

Você pode estar se perguntando: qual o lado prático de equação do segundo grau? Veja na sequência.

Exemplo 5.6 O lucro mensal, em reais, de uma empresa é dado por $L = -100x^2 + 1000x - 1600$, em que x é a quantidade vendida. Para que valores de x o lucro é igual a R$ 900,00?

Resolução. Para que o lucro seja igual a R$ 900,00 você tem $L = 900$, ou seja,

$$-100x^2 + 1.000x - 1.600 = 900.$$

Para encontrar os valores de x basta resolver a equação do segundo grau:

$$-100x^2 + 1.000x - 1.600 = 900.$$

Dividindo ambos os membros da equação $-100x^2 + 1.000x - 1.600 = 900$ por 100 você tem:

$$-x^2 + 10x - 16 = 9$$
$$\Rightarrow -x^2 + 10x - 16 - 9 = 0$$
$$\Rightarrow -x^2 + 10x - 25 = 0,$$

onde $a = -1$, $b = 10$ e $c = -25$.

Aplicando a fórmula de Bhaskara para a equação $ax^2 + bx + c = 0$, você tem:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Assim, você tem:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \text{x} (-1) \text{x} (25)}}{2 \text{x} (-1)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \text{x}\ 25}}{2 \text{x} (-1)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 100}}{-2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{0}}{-2} = \frac{-10 \pm 0}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5,$$

ou seja,

$x = 5$.

Portanto, para que o lucro seja igual a R$ 900,00 é necessário que a quantidade vendida seja 5 unidades.

Atividades de aprendizagem

Para verificar se você compreendeu como resolver uma equação do segundo grau, busque realizar as atividades propostas abaixo.

4. Resolva as equações a seguir:

   a) $x^2 - 3x = 0$.

   b) $x^2 + 3x \cdot (x - 12) = 0$.

   c) $3x - \frac{1}{3x} = 0$.

   d) $4 - \frac{x^2}{9} = 0$.

5. Determine a solução para as equações abaixo:

   a) $x(x - 3) + 2 = 0$.

   b) $\frac{x^2}{6} = \frac{3x}{2} - 3$.

   c) $x^2 + 2x - 8 = 0$.

6. Determinar o valor de m para que a equação $x^2 - 6x + 3m = 0$ admita raízes reais e iguais.

7. Sabendo que a receita diária de estacionamento para automóveis do Shopping Center Aurora é $R(p) = 400p - 20p^2$, onde p é o preço, em reais, cobrado por dia de estacionamento por carro, calcule o preço que deve ser cobrado para dar uma receita diária de R$ 1.500,00.

Inequações do 1° Grau

Antes de começarmos a falar sobre inequações do 1º grau veremos a relação de ordem em R (números reais).

Relação de Ordem em $\mathbb{R}$

A relação de ordem (maior ou menor) em conjunto dos números reais é definida por:

- $a > b \Leftrightarrow a - b > 0, \forall a, b \in \mathbb{R}$, ou seja,

  a é **maior** que *b* se e somente se a – b for **positivo**.
- $a < b \Leftrightarrow a - b < 0, \forall a, b \in \mathbb{R}$, ou seja,

  a é **menor** que *b* se e somente se a – b for **negativo**.

O significado geométrico da desigualdade $a < b$ (leia-se "*a* menor que *b*") é simplesmente que *a* está à esquerda de *b*; a desigualdade equivalente $b > a$ (leia-se "*b* maior que *a*") significa que *b* está à direta de *a*. Um número *a* é positivo ou negativo conforme $a > 0$ ou $a < 0$. Se você quer dizer que *a* é positivo ou igual a zero, escreve-se $a \geq 0$ e lê-se "*a* maior ou igual a zero". Do mesmo modo, $a \geq b$ significa que $a>b$ ou $a = b$. Assim, $5 \geq 3$ e $5 \geq 5$ são desigualdades verdadeiras.

Assim como o conjunto dos Números Reais, as desigualdades também apresentam propriedades fundamentais, dadas a seguir.

Propriedades das desigualdades

Para quaisquer números reais a, b, c e d, valem as propriedades:

P1. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$, para qualquer real c. Por exemplo, $3 < 5 \Rightarrow 3 + 4 < 5 + 4$.

P2. $a < b$ e $c < d \Rightarrow a + c < b + d$. Por exemplo, $6 < 8$ e $5 < 7 \Rightarrow 6 + 5 < 8 + 7$.

P3. $a < b$ e $b < c \Rightarrow a < c$. Por exemplo, $5 < 9$ e $9 < 11 \Rightarrow 5 < 11$.

P4. $a < b$ e $c > 0 \Rightarrow a \times c < b \times c$. Por exemplo, $4 < 6$ e $3 > 0 \Rightarrow 4 \times 3 < 6 \times 3$.

P5. $a < b$ e $c < 0 \Rightarrow a \times c > b \times c$. Por exemplo, $4 < 6$ e $-3 < 0 \Rightarrow 4 \times (-3) > 6 \times (-3)$.

P6. $0 < a < b$ e $0 < c < d \Rightarrow a \times c < b \times d$. Por exemplo, $0 < 4 < 7$ e $0 < 5 < 8 \Rightarrow 4 \times 5 < 7 \times 8$.

Agora que já falamos sobre a relação de ordem em R e vimos algumas propriedades das desigualdades, vamos iniciar nosso estudo sobre as inequações do 1º grau. Você está pronto? Podemos começar?

Denominamos inequação do 1° grau a toda expressão que pode ser reduzida às formas:

$$ax + b \geq 0,\ ax + b > 0,\ ax + b \leq 0 \text{ ou } ax + b < 0.$$

A resolução de uma inequação (ou desigualdade) do 1º grau é feita de modo análogo ao das equações do 1º grau, porém você deve lembrar que, quando multiplicamos ou dividimos ambos os

membros da inequação (ou desigualdade) por um número negativo, muda ou inverte o sentido da inequação (ou desigualdade).

Observações gerais sobre Inequações

Observando as condições de vida da população do Brasil, obviamente encontraremos um grande mar de desequilíbrio. Essas desigualdades podem ser encontradas em diversas áreas, mas as que mais de destacam são a social e a econômica. Veja alguns exemplos de desigualdades:

- **Salarial**: enquanto muitos brasileiros estão com faixas de salários baixas, mal podendo se sustentar, alguns outros têm seus salários altos.
- **Habitação**: muitos brasileiros têm casas boas em bairros e cidades nobres, outros não têm condições de ter sua casa própria.
- **Moradia**: O número de pessoas que vivem nas ruas aumenta cada vez mais com o passar dos anos.
- **Alimentação**: Cerca de 40% da população que vive em ambiente rural, no campo, vivem em situação precária.

Se pudéssemos pesar estas diferenças apresentadas em uma balança, veríamos com mais clareza as grandes desigualdades.

Conheça agora alguns exemplos de inequações do 1º grau.

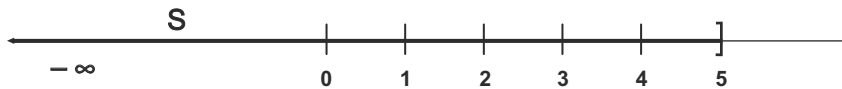
Exemplo 5.7 Resolva as inequações em $\mathbb{R}$ a seguir:

Resolução: $5x - 3 \leq 2x + 12 \Rightarrow 5x - 2x \leq 12 + 3$

$\Rightarrow 3x \leq 15 \Rightarrow x \leq \dfrac{15}{3} \Rightarrow x \leq 5.$

Portanto,

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (-\infty, 5]\}$.

Graficamente você tem a solução abaixo:

Chegou sua vez de verificar se aprendeu. Para tanto resolva a inequação a seguir e faça sua representação gráfica.

a) $-3x + 7 > 0$.

Resposta: $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x < \frac{7}{3} \right)\right\}$.

Exemplo 5.8 Resolva as seguintes inequações em R:

$$-2 \leq 3x + 4 < 8.$$

Resolução: Para resolver $-2 \leq 3x + 4 < 8$ você adiciona -4 aos membros de $-2 \leq 3x + 4 < 8$ e obtém o elemento neutro da adição, assim:

$-2 \leq 3x + 4 < 8 \Rightarrow -2 - 4 \leq 3x + 4 - 4 < 8 - 4$

$\Rightarrow -6 \leq 3x + 0 < 4 \Rightarrow -6 \leq 3x < 4$.

Agora, você multiplica todos os membros de $-6 \leq 3x < 4$ por $\frac{1}{3}$ para isolar a variável x. Logo,

$$\frac{1}{3} \text{x} (-6) \leq \frac{1}{3} \text{ x } 3x < \frac{1}{3} \text{ x } 4 \Rightarrow \frac{1 \text{ x } (-6)}{3} \leq \frac{1 \text{ x } 3}{3} x < \frac{1 \text{ x } 4}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-6}{3} \leq \frac{3}{3} x < \frac{4}{3} \Rightarrow -2 \leq 1\, x < \frac{4}{3} \Rightarrow -2 \leq 1\ \ x < \frac{4}{3}\ .$$

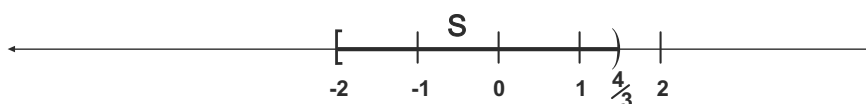
Resolvendo diretamente, observe as etapas.

$-2 - 4 \leq 3x + 4 - 4 < 8 - 4$

$\Rightarrow -6 \leq 3x < 4 \Rightarrow \frac{-6}{3} \leq \frac{3}{3}x < \frac{4}{3} \Rightarrow -2 \leq x < \frac{4}{3}.$

Portanto,

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -2 \leq x < \frac{4}{3} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \in \left[-2,\ \frac{4}{3} \right) \right\}.$$

Graficamente você tem a solução abaixo:

Exemplo 5.9 Resolva as seguintes inequações em $\mathbb{R}$:

$$\frac{x}{x-2} \geq 5, \text{ com } x - 2 \neq 0, \text{ ou seja, } x \neq 2.$$

Resolução: Para eliminar o denominador de $\frac{x}{x-2} \geq 5$, com $x - 2 \neq 0$, você precisa multiplicar os dois membros por $x - 2$, usando as propriedades (4) e (5) das desigualdades; e para isto você divide o problema em duas etapas:

Etapa 1: Para $x - 2 > 0$ ou $x > 2$, pelo fato de que o denominador não pode ser nulo.Você deve multiplicar os dois membros da desigualdade por $x - 2$. Observe a seguir:

$\frac{x}{x-2} \geq 5 \Rightarrow \frac{x}{x-2} \times (x-2) \geq 5 \times (x-2)$ (Propriedade 4)

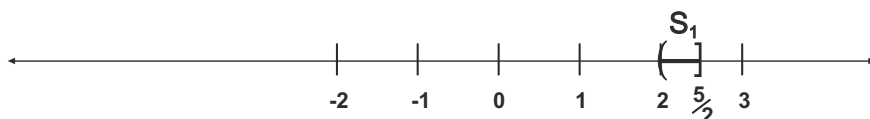
$\Rightarrow x \geq 5 \times (x - 2) \Rightarrow x \geq 5x - 10$

$\Rightarrow x - 5x \geq -10 \Rightarrow -4x \geq -10 \Rightarrow 4x \leq 10$ (Propriedade 5)

$$x \quad \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x \quad \frac{5}{2}.$$

Como nesta etapa $x>2$, da solução aqui encontrada só constitui solução da desigualdade dada a parte desta que é maior do que 2. E, assim você obtém o conjunto-solução da Etapa 1, isto é,

$$S_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}; x > 2 \text{ e } x \leq \frac{5}{2} \right\} \text{ ou } S_1 = \left(2, \frac{5}{2} \right].$$

Graficamente você tem a solução abaixo:

Etapa 2: Para $x - 2 < 0$ ou $x < 2$, você multiplica os dois membros da desigualdade por $x - 2$, e tem:

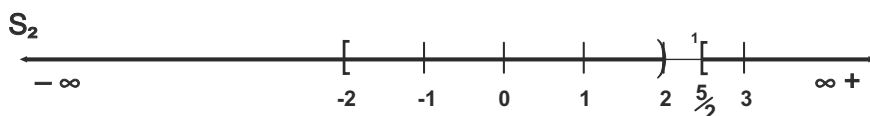
$$\frac{x}{x-2} \geq 5 \Rightarrow \frac{x}{x-2} \times (x-2) \leq 5 \times (x-2) \text{(Propriedade 5)}$$

$$\Rightarrow x \leq 5 \times (x-2) \Rightarrow x \leq 5x - 10 \Rightarrow x - 5x \leq -10$$

$$\Rightarrow -4x \leq -10 \Rightarrow 4x \geq 10 \text{ (Propriedade 5)}$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \Rightarrow x \geq \frac{5}{2}.$$

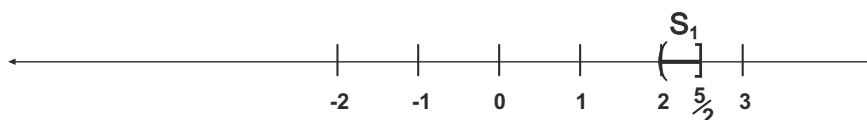
Como nesta etapa $x < 2$, da solução aqui encontrada só constitui solução da desigualdade dada a parte desta que é menor do que 2.

Graficamente você tem a solução abaixo:

Como $x < 2$ e $x \geq \frac{5}{2}$, você não encontra número real algum que seja solução da desigualdade proposta. Então a Etapa 2 leva ao seguinte conjunto solução:

$$S_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}; x < 2 \text{ e } x \geq \frac{5}{2} \right\} = \varnothing.$$

Logo, a resolução da desigualdade proposta é:

$$S = S_1 \cup S_2 = \left(2, \frac{5}{2}\right] \cup \ \varnothing = \left(2, \frac{5}{2}\right], \text{ ou seja, } S = S_1 = \left(2, \frac{5}{2}\right].$$

Graficamente você tem a solução abaixo:

Você pode estar se perguntando: qual o uso prático de inequação? Vamos ver juntos?

Exemplo 5.10 Sabendo que o custo (C) diário de produção de certo item é $C = 300 + 20x$, onde x é o número de itens produzidos em um dia e sabendo que em determinado mês o custo diário variou entre um máximo de R$ 9.000,00 e um mínimo de R$ 4.000,00, em que intervalo variou a produção diária nesse mês?

Resolução: Como o custo $C = 300 + 20x$ em determinado mês no máximo é de R$ 9.000,00 e no mínimo é de R$ 4.000,00, você tem a seguinte desigualdade ou inequação:

$$4.000 \leq 300 + 20x \leq 9.000.$$

E resolvendo você tem:

$4.000 - 300 \leq 300 \ - 300 + 20x \leq 9.000 - 300$ (subtraindo 300 em cada lado)

$\Rightarrow 3.700 \leq 0 + 20x \leq 8.700$

$\Rightarrow 3.700 \leq 20x \leq 8.700$

$\Rightarrow \frac{1}{20} \times 3.700 \leq \frac{1}{20} \times 20x \leq \frac{1}{20} \times 8.700$ (multiplicando $\frac{1}{20}$ em cada lado)

$\Rightarrow \frac{1\text{x } 3.700}{20} \leq \frac{1\text{x } 20}{20}\, x \leq \frac{1\text{x } 8.700}{20}$

$$\Rightarrow \frac{1x\ 3.700}{20} \leq \frac{20}{20}x \leq \frac{8.700}{20}$$

$$\Rightarrow 185 \leq 1x \leq 435$$

$$\Rightarrow 185 \leq x \leq 435.$$

Portanto, a produção diária de x itens nesse mês variou no intervalo $185 \leq x \leq 435$, ou seja, $x \in [185, 435]$.

Exemplo 5.11 A administração da Bolsa de Valores da cidade XZ estimou que fosses necessários x milhares de reais para comprar ações da empresa Beta no valor dado por $100.000 \times \left(-1 + \sqrt{1 + (0{,}001)x}\right)$. Determine a quantia, em reais, que a administração da Bolsa precisa para comprar pelo menos 100.000 ações da empresa Beta.

Resolução: Assim, temos a seguinte inequação:

$$100.000 \times \left(-1 + \sqrt{1 + (0{,}001)x}\right) \geq 100.000\ .$$

Resolvendo,

$$100.000 \times \left(-1 + \sqrt{1 + (0{,}001)x}\right) \geq 100.000 \text{ (÷ por 100.000)}$$

$$1 \quad \sqrt{1 \quad 0{,}001x} \quad \geq \qquad \sqrt{1 \quad 0{,}001x} \geq$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + 0{,}001x} \geq 2 \Rightarrow (\sqrt{1 + 0{,}001x})^2 \geq 2^2$$

$$\Rightarrow 1 + 0{,}001x \geq 2^2 \Rightarrow 1 + 0{,}001x \geq 4$$

$$\Rightarrow 0{,}001x \geq 4 - 1 = 3 \Rightarrow 0{,}001x \geq 3$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{3}{0{,}001} = 3.000.$$

Portanto, a administração da Bolsa de Valores necessita, no mínimo, R$ 3.000,00.

Exemplo 5.12 Supondo que o lucro (L) mensal da empresa Alegria é $L = 40x - 7000$, onde x é a quantidade mensal vendida, acima de qual quantidade mensal vendida o lucro é superior a R$ 20.000,00?

Resolução: Para que a empresa Alegria tenha lucro superior a R$ 20.000,00 é necessário que o lucro $L = 40x - 7000$ seja maior

que R$ 20.000,00. Você tem com isso uma inequação ou desigualdade do tipo:

$$40x - 7000 > 20.000,$$

e resolvendo temos

$40x - 7.000 > 20.000$

$\Rightarrow 40x - 7.000 + 7.000 > 20.000 + 7.000$ (somando 7.000 em ambos os lados)

$\Rightarrow 4x + 0 > 27.000 \Rightarrow 40x > 27.000$

$\Rightarrow \frac{1}{40} \times 40x > \Rightarrow \frac{1}{40} \times 27.000$ (multiplicando por $\frac{1}{40}$ ambos os lados)

$$\frac{1 \text{ x } 40}{40} x > \frac{1 \text{ x } 27.000}{40} \qquad \frac{40}{40} x > \frac{27.000}{40}$$

$\Rightarrow 1x > 675 \Rightarrow x > 675.$

Portanto, acima da quantidade mensal vendida de 675 o lucro será superior a R$ 20.000,00.

Atividades de aprendizagem

Para saber se você está entendendo, procure, então, resolver as atividades propostas e, caso tenha dúvidas, faça uma releitura cuidadosa dos conceitos, preste atenção nos exemplos apresentados e tente resolver as atividades antes de prosseguir seus estudos. Lembre-se: você pode contar com o auxílio de seu tutor.

8. Resolva as inequações do 1º grau abaixo em $\mathbb{R}$.

   a) $3x - 12 > 2x + 3$.

   b) $3(2x + 2) > 2(9 - 3x)$.

   c) $(x - 2)(x + 3) \leq 0$.

   d) $\dfrac{5x+2}{3} - \dfrac{x-3}{2} > 1$.

   e) $\dfrac{3x}{2} + 3 < 5x - \dfrac{1}{2}$

9. Determine as inequações em $\mathbb{R}$.

   a) $\dfrac{x+2}{x-3} > 0$.

   b) $\dfrac{-2x-3}{x+2} < 0$.

   c) $\dfrac{3x-5}{x+3} \geq 4$.

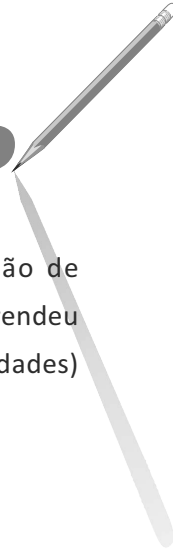
   d) $\dfrac{2x-3}{x+4} < 1$.

10. O custo mensal de produção de ternos da fábrica Bem Vestir é $C(x) = 4.000 + 8x$. Determinar a quantidade mensal mínima produzida sabendo-se que a fábrica Bem Vestir dispõe de R$ 28.000,00 para investir nessa produção.

Complementando.....

Para aprofundar os conceitos estudados desta Unidade consulte:

- Cálculo: funções de uma e várias variáveis – de Pedro A. Morettin; Samuel Hazzan e Wilton de O. Bussab.
- Ensino Fundamental – Equações do primeiro grau – de Ulysses Sodré, disponível em: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/eq1g/eq1g.htm>. Acesso em: 2 jun. 2009.
- Equação do 1º grau – de Maurício Martins, disponível em: <http://portalmatematico.com/equacao.shtml>. Acesso em: 2 jun. 2009.
- Portal Só Matemática – onde você encontra vários exercícios para praticar os assuntos aqui estudados para conhecer acesse o site <http://www.somatematica.com.br/>. Acesso em: 2 jun. 2009.

Resumindo

Nesta Unidade você compreendeu a resolução de equações de primeiro e segundo grau, bem como aprendeu a resolver uma inequação de primeiro grau (desigualdades) utilizando suas propriedades.

Respostas das Atividades de aprendizagem

1. a) $S = \{1\}$. b) $S = \{2\}$. c) $S = \{4\}$.

2. a) $S = \left\{\frac{15}{14}\right\}$. b) $S = \{1, 2\}$. c) $S = \left\{-\frac{56}{59}\right\}$.

3. R$ 20,00.

4. a) $S = \{0, 3\}$. b) $S = \{0, 9\}$.

   c) $S = \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$. c) $S = \{-6, 6\}$.

5. a) $S = \{1, 2\}$. b) $S = \{3, 6\}$. c) $S = \{-4, 2\}$.

6. $m = 3$.

7. R$ 5,00 ou R$ 15,00.

8. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 15\}$. b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.

   c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 2\}$. d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$.

   e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.

9. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 3\}$.

   b) $S = \left\{x \in \mathbb{R}\ x < -2\ ou\ x > -\frac{3}{2}\right\}$.

   c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -17 \leq x < -3\}$.

   d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 7\}$.

10. $x \geq 3.000$ (unidades de terno).

Considerações finais

Chegamos ao final da disciplina de Matemática Básica. Ao longo desta, procuramos relembrar importantes conteúdos básicos que serão de grande valia em seu estudo nas disciplinas quantitativas deste curso. Para ter sucesso em seu estudo, invista-se de coragem e procure resolver todas as atividades propostas.

Importante! Não guarde dúvida alguma com você. Busque a ajuda do seu tutor ou colegas de curso sempre que achar necessário.

Continuamos à sua disposição.

Sucesso! Bons estudos!

Referências

ALENCAR FILHO, Edgar de. *Teoria Elementar dos conjuntos*. 15. ed. São Paulo: Nobel, 1974.

BEZERRA, Manoel J. *Matemática* – Volume Único. São Paulo: Editora Scipione, 1996.

GIOVANI, José Ruy, CASTRUCCI, Benedito; GIOVANI JR., José Ruy. *A Conquista da matemática*: Teoria e aplicação. São Paulo: FTD, 1992.

GÓES, Hilder Bezerra e TONAR, Ubaldo. *Matemática para concursos*. 7. ed. São Paulo – Fortaleza: ABC Editora, 2004.

LEITHOLD, Louis. *Matemática Aplicada à Economia e Administração*. São Paulo: Harbra,1988.

MEDEIROS, Valéria Zuma *et alii*. *Pré-Cálculo*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

MORETTIN, Pedro Alberto; HAZZAN, Samuel; BUSSAB, Wilton de Oliveira. *Cálculo* – funções de uma e várias variáveis. São Paulo: Saraiva, 2005.

NAME, Miguel Asis. *Vencendo a matemática*. São Paulo: Editora do Brasil, 2005.

WEBER, Jean E. *Matemática para Economia e Administração*. 2. ed. São Paulo: Harbra, Harper & Row do Brasil, 1986.

Minicurrículo

Fernando Guerra

Licenciado em Matemática pela Universidade Presidente Antônio Carlos de Barbacena (1974/ Minas Gerais), possui graduação em Administração pela Universidade Federal de Santa Catarina (1989) e é Mestre em Teoria (Ciência) da Informação (UFSC, 1980). Atualmente é professor adjunto da Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Matemática, desde 1978 e participa da EaD-UFSC desde 2006. Tem experiência na área de Finanças, com ênfase em Matemática Financeira, Análise de Investimentos e Avaliação de Empresas.

Possui publicações dos livros:

Matemática Financeira Através da HP-12C. 3. ed. Florianópolis: Ed. da UFSC, 2006; e

Integrando Matemática Financeira com Excel, em coautoria com Adilson Almeida. 2. ed. Florianópolis: Visual Books, 2006.

e-mail: <guerra@mtm.ufsc.br>.

Minicurrículo

Inder Jeet Taneja

É doutor (Ph.D.) pela Universidade de Délhi (1975/Índia) e Pós-doutor nas áreas de Teoria (Ciências) da Informação (1983-1984/Itália) e Estatística (1989-1990/Espanha). É pesquisador, com área de concentração em Teoria (Ciência) da Informação, na qual tem cerca de 80 artigos, 5 capítulos e 1 livro publicados - seus trabalhos têm mais de 400 citações. Atualmente é professor Titular do Departamento de Matemática de Universidade Federal de Santa Catarina, onde leciona diversas disciplinas de Matemática desde 1978.

e-mail: <taneja@mtm.ufsc.br>

Web-site: <http://www.mtm.ufsc.br/~taneja>

Fernando Guerra
Inder Jeet Taneja

Volume 1

Matemática Básica

ERRATA

Identificação	Onde se lê	Leia-se
Sumário Unidade I	Conjuntos	Conjuntos Numéricos
Sumário Unidade I	Conjuntos numéricos naturais	Conjunto dos números naturais ou Os números naturais
Sumário Unidade I	Conjuntos numéricos inteiros	Conjunto dos números inteiros ou Os números inteiros
Sumário Unidade I	Conjuntos numéricos racionais	Conjunto dos números racionais ou Os números racionais
Sumário Unidade I	Conjuntos numéricos irracionais	Conjunto dos números irracionais ou Os números irracionais
Sumário Unidade I	Conjuntos numéricos reais	Conjunto dos números reais ou Os números reais
Sumário Unidade V	...e Valor Absoluto	Excluir
p.16	"A é o conjunto cujos elementos são a, b,c, d"	"A é o conjunto **finito** cujos elementos são a, b, c, d"
p.17	{segunda, sexta, sábado}	**B =** {segunda, sexta, sábado}
p.19	...nosso estudo sobre conjunto de número pelo conjunto....	....nosso estudo sobre **conjuntos numéricos** pelo conjunto....
p.19	2° parágrafo	A palavra **comerciante** está repetida
p.20	última linha	Retirar excesso de parênteses
p.26	$B = \{x \in R / 9 < x < 10\} = \Phi$	$B = \{x \in \mathbf{N} / 9 < x < 10\} = \Phi$
p.26	ii) $B = \{x \in R / 3 < x < 5\} = \{4\}$	ii) $B = \{x \in \mathbf{N} / 3 < x < 5\} = \{4\}$
p.27	$B = \{x \in R / 2 < x < 7\} = \{3,4,5,6\}$	$B = \{x \in \mathbf{N} / 2 < x < 7\} = \{3,4,5,6\}$
p.31	Exercício n 5 e)	$(-\infty, 1) \cup [4, +\infty)$
p.28 p. 29	$A = \{x \in R / x \leq 4\} = \{0,1,2,3,4\}$ $B = \{x \in R / 2 \leq x < 7\} = \{2,3,4,5,6\}$ $A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ $= \{x \in R \mid x \leq 6\}$ $U = \{x \in R \mid x \leq 7\}$ $= \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$	$A = \{x \in \mathbf{N} / x \leq 4\} = \{0,1,2,3,4\}$ $B = \{x \in \mathbf{N} / 2 \leq x < 7\} = \{2,3,4,5,6\}$ $A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ $= \{x \in N \mid x \leq 6\}$ $U = \{x \in N \mid x \leq 7\}$ $= \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$
p.55	45/12	45/**14**

p.56	b) $\frac{\frac{3}{2}}{5}$	b) $\frac{\frac{3}{2}}{5}$.
p.56	Exemplo 2.6 $\frac{2-3-11}{3-7-11}$ Resolução $\frac{2-3-11}{3-7-11}=\frac{2}{7}$	$\frac{2\cdot 3\cdot 11}{3\cdot 7\cdot 11}$ $\frac{2\cdot 3\cdot 11}{3\cdot 7\cdot 11}=\frac{2}{7}$
p.57	Letra b) resposta $\frac{4a}{6xy^4}$	$\frac{4a}{5xy^4}$
p.57	Exemplo 2.8 Resolução	Retirar...letra c) Retirar... letra d)
p.58	Exemplo 2.9 $...=\frac{x+5}{(x+5)(x+5)}=...$	$...=\frac{x+5}{(x+5)(x-5)}=...$
p. 62	Exercício 8 Quantos azulejos serão colocados na parede?	Neste caso, você esta querendo saber a área e não quantos usamos no comprimento ou largura! A resposta está como altura ou comprimento!
p. 64	2) d) $\frac{x+y}{1-a}$	$\frac{c+y}{1-a}$
p. 64	2) e) $\frac{x+y}{7}$	$\frac{x+5}{7}$
p.72	2) erro na resposta d) 5/2	Correto. $\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$
p.82	Exemplo 3.10 irredutível	Definir para os alunos
p.84	Assim, $\frac{196}{p}=\frac{28}{100}$	$\frac{196}{P}=\frac{28}{100}$
p.87	Exercício 13 b)32/125	13) b) 63/250
p.87	Letra e)2/3%	Excluir
p.88	Exercício 22) resposta	20 metros
p.88	Exercício 25)resposta 16,8%	R$16,80
p.95	...potencialização...	...potenciação
p.100	$\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^{2-3}=\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^{2+3}=\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$
p.102	$3^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}=3^{\frac{2-1}{3}}=3^{\frac{1}{3}}$	$3^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{1}{2}}=3^1=3$
p.103	b) 16/9	b) 9/16

p.103	c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{3}}$	c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}}$
p.103	P4. Potência de outra potência	Potência de potência
p.103	$.... = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5} = ...$	$.... = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = ...$
p.104	Exercícios n 1 Resposta letra f) 0	f) 1
p.104	Exercício n 1 Resposta letra h) $-\frac{27}{64x^3}$	h) $-\frac{125}{64x^3}$
p. 104	Exercício n 2 Resposta letra b) 3^{-18}	b) 3^{30}
p.107	...qualquer fração que tenha numerador (parte de cima da fração) igual ao denominador (parte de baixo da fração)....	...toda fração cujos numeradores e denominadores são iguais, podemos pensar em um número inteiro para representá-la...
p. 119	1 - h) $-\frac{27}{64x^3}$. 2 – b) 3^{-18}. 3 – h) $\frac{8}{11}$. 9 – d) 0,6999	1 - h) $-\frac{125}{64x^3}$. 2 – b) 3^{30}. 3 – h) excluir. 9 – d) 0,699
p.112	Exemplos $\log_5\left(\frac{50}{2}\right) = \log_5 50 - \log_5 5$	$\log_5\left(\frac{50}{2}\right) = \log_5 50 - \log_5 2$
p.113	b) $\log_{\frac{1}{16}} 2$ Outra sugestão seria...	Pela definição: $\log_{\frac{1}{16}} 2 = x$ $\left(\frac{1}{16}\right)^x = 2$ $2^{-4x} = 2^1$ $-4x = 1$ $x = -\frac{1}{4}$
p.114	a) resposta $x = \frac{1}{4}$	$x = -\frac{1}{4}$

p.114	Logo, $(x^2 - y^2) = \log(x+y)(x-y)$	$\log(x^2 - y^2) = \log(x+y)(x-y)$
p.129	$\Rightarrow \frac{7x+3}{4} = \frac{12x-3}{6}$	$\Rightarrow \frac{7x+3}{4} = \frac{13x-3}{6}$
p.132	Exercício 1) letra b) $\frac{5}{2x} + \frac{15}{12}$	$\frac{5}{2x} = \frac{15}{12}$
p. 132	Exercício 2) Resposta S= {3, 6}	S = {1/2}
p.132	Exercício 2) Resposta c) $S = \left\{-\frac{50}{61}\right\}$	$S = \left\{-\frac{56}{59}\right\}$
p.141	$S = \{x \in R / x < 5\} = ...$	$S = \{x \in R / x \leq 5\} = ...$
p.141	$S = \left\{x \in R / x \in \left(-\infty, \frac{7}{3}\right)\right\}$	$S = \left\{x \in R / x < \frac{7}{3}\right\}$
p.150	Resposta do exercício n. 10 x≤ 3.000,00	x≥3.000 (unidades de terno)
p.150	Exercício 9 letra d)	Resposta correta: $S = \{x \in \mathrm{R} \mid -4 < x < 7\}$

Fernando Guerra
Inder Jeet Taneja

Volume 1

Matemática Básica

ORIENTAÇÕES CD

Introdução

Este aplicativo contém o material da disciplina *Matemática Básica*, elaborado pelos Professores Fernando Guerra e Inder Jeet Taneja para o Curso de Bacharelado em Administração Pública, oferecido na modalidade a distância, integrante do Programa Nacional de Formação em Administração Pública – PNAP.

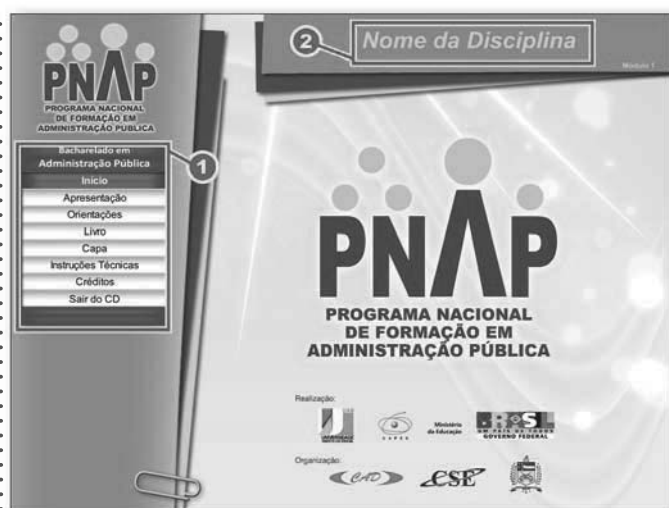
Como utilizar o aplicativo

Tela inicial

A **imagem** destaca duas regiões da tela inicial deste CD-ROM:

1. Menu:

   Contém botões que remetem o usuário para as diferentes seções deste CD-ROM.

2. Nome da Disciplina.

Tela de visualização de vídeos

Este CD-ROM contém duas seções com vídeos: "Apresentação" e "Orientações".

Os principais comandos disponíveis nesta tela estão destacados na imagem ao lado:

1. Área de vídeo:

   Nesta região você visualizará o vídeo selecionado.

2. Comandos de vídeo:

   Nesta região estão os botões utilizados para comandar o vídeo na seguinte ordem: Reproduzir, Pausar, Parar e Controle deslizante do vídeo.

3. Submenu de seleção de vídeo:

   Este submenu só está disponível na visualização do vídeo de Orientações. Nele você pode escolher para visualizar o vídeo de Orientações da disciplina ou o vídeo contendo o currículo do professor.

Tela de visualização de conteúdo

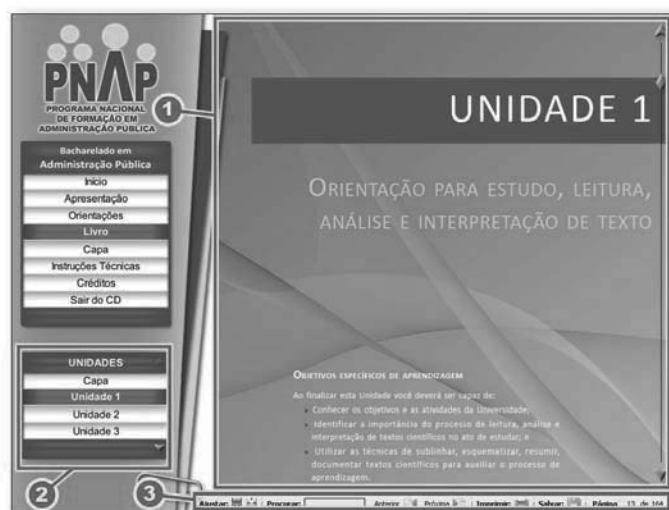
Este CD-ROM contém pelo menos duas seções com conteúdo em formato de texto: "Livro" e "Capa". Algumas disciplinas também contêm uma seção de "Material Complementar". Na imagem ao lado são destacadas as seguintes regiões:

1. Área de visualização do conteúdo.
2. Submenu das Unidades:

   Neste submenu, disponível na seção "Livro", você pode clicar para remeter o conteúdo à página inicial da Unidade que desejar. Na seção "Material Complementar", este submenu apresentará os diferentes materiais.

3. Ferramentas de texto:

   Esta região contém ferramentas geralmente utilizadas para a visualização de documentos de texto e imagem:

   - Ajustar: Dois botões permitem que você visualize o conteúdo ajustado pela largura ou pela altura do documento.
   - Procurar: Neste campo, você pode realizar buscas simples no documento visualizado, apertando a tecla ENTER. As ocorrências encontradas no texto procurado serão grifadas em amarelo. Os botões "Anterior" e "Próximo" permitem uma navegação automática entre as ocorrências encontradas.
   - Imprimir: Comando para impressão do conteúdo visualizado.

- Salvar: Abre uma caixa para selecionar a pasta de destino para gravação do conteúdo visualizado no formato Adobe Acrobat (PDF). Se a gravação for bem-sucedida, você poderá encontrar o arquivo na pasta selecionada, com o nome que você escolheu.
- Visualização da página.

Salvando arquivos

Alguns documentos incluídos neste CD-ROM estão disponíveis em mais de um formato, por exemplo, o Livro-texto da disciplina e a Capa do CD. Quando você clicar para salvar um desses documentos, uma janela aparecerá para você escolher o formato de gravação.

No caso da Capa do CD (como na imagem), você poderá escolher entre o formato PDF (Adobe Acrobat) e CDR (CorelDRAW, versão 12).

Ao clicar no botão "Salvar", visualizado no Livro-texto, você poderá escolher entre dois documentos no formato PDF. O primeiro tipo é ideal para a visualização em tela e o segundo está formatado especialmente para impressão em gráfica.